О НЕИЗМЕННОСТИ РАНГА m-ВЕКТОРОВ НАД КОММУТАТИВНЫМ КОЛЬЦОМ ПРИ ПЕРЕХОДЕ К ПОЛЮ ЧАСТНЫХ

Г. Б. Клейнер

Пусть A — целостное коммутативное кольцо с 1, $\mathrm{Fr}(A)$ — его поле частных, A^n — свободный A-модуль с базисом $e_1, \ldots, e_n$. Ненулевой m-вектор $\omega \in \Lambda^m(A^n)$ называется *разложимым*, если он представим в виде $\omega = x_1 \wedge \ldots \wedge x_m$, где $x_i \in A$ $(i = 1, \ldots, m)$. Так как $\Lambda^m(A^n)$ состоит из сумм вида

$$\omega = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_m \leqslant n} a_{i_1 \ldots i_m} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_m},$$

где $a_{i_1 \ldots i_m} \in A$, всякий $\omega \in \Lambda^m(A^n)$ представим в виде суммы не более чем C_n^m разложимых m-векторов. Наименьшее число слагаемых, достаточных для представления ω в виде суммы разложимых, называется его рангом. Ранг разложимого m-вектора равен 1.

Естественное вложение $\Lambda^m(A^n) \subset \Lambda^m(\mathrm{Fr}(A)^n)$ позволяет рассматривать m-вектор $\omega \in \Lambda^m(A^n)$ как элемент внешней алгебры векторного пространства $\mathrm{Fr}(A)^n$ над полем $\mathrm{Fr}(A)$. Так как разложимый над A^n m-вектор является разложимым и над $\mathrm{Fr}(A)^n$, ранг ω над $\mathrm{Fr}(A)$ не превосходит его ранга над A. Кольца, для которых всякий m-вектор $\omega \in \Lambda^m(A^n)$, разложимый над $\mathrm{Fr}(A)$, разложим и над самим кольцом, называются плюккеровыми. Помимо полей, к ним относятся кольца главных идеалов, дедекиндовы кольца и кольца многочленов от одной переменной над дедекиндовым кольцом [1]. Над плюккеровыми кольцами, таким образом, сохраняют свой ранг при спуске с $\mathrm{Fr}(A)$ к A m-векторы ранга 1. Естественно возникает вопрос: каковы те кольца, в которых этим свойством обладают m-векторы произвольного ранга $k > 1$?

Частичный ответ на этот вопрос дал М. Е. Котлярский, доказавший [2], что при $m = 2$ такими являются нётеровы и прюферовы плюккеровы кольца. В настоящей заметке доказывается, что при $m > 2$ единственными кольцами со свойством сохранения ранга m-векторов при переходе к полю частных являются поля.

Пусть $D_A(k, m) = \{\omega \in \Lambda^m(A^n) \mid \text{ранг } \omega = k \text{ над } A\}$ и $D_{\mathrm{Fr}(A)}(k, m) = \{\omega \in \Lambda^m(A^n) \mid \text{ранг } \omega = k \text{ над } \mathrm{Fr}(A)\}$.

Теорема. *Если для целостного коммутативного кольца A $D_A(k, m) = D_{\mathrm{Fr}(A)}(k, m)$ при $k > 1$, $m > 2$, $k \leqslant m$, то $A = \mathrm{Fr}(A)$.*

Доказательство. Пусть a — произвольный элемент кольца A, $a \neq 0$, $a \neq 1$. Покажем, что он обратим. Рассмотрим m-вектор $\omega = \left(\frac{1}{a} e_1 + e_{m+1}\right) \wedge (e_2 + a e_{m+2}) \wedge \ldots \wedge (e_m + a e_{2m}) + \left(1 - \frac{1}{a}\right) e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_m + e_{2m+1} \wedge \ldots \wedge e_{3m} + \ldots + e_{(k-1)m+1} \wedge \ldots \wedge e_{km} \in \Lambda^m(\mathrm{Fr}(A)^{km})$. Перемножив векторы в первом разложимом слагаемом, можно убедиться, что на самом деле $\omega \in \Lambda^m(A^{km})$. Так как внешнее произведение всех разложимых слагаемых выражения ω равно $\pm a^{m-1}\left(1 - \frac{1}{a}\right) e_1 \wedge \ldots \wedge e_{km} \neq 0$, то в силу теоремы 2.10 [3] ранг ω над $\mathrm{Fr}(A)$ равен k. Следовательно, $\omega = x_1 \wedge \ldots \wedge x_m + \ldots + x_{(k-1)m+1} \wedge \ldots \wedge x_{km}$, где $x_i \in A^{2m}$ $(i = 1, \ldots, km)$. Отсюда по теореме единственности разложения m-вектора $(m > 2)$ в сумму разложимых m-векторов, произведение которых отлично от нуля ([3], теорема 4.4), заключаем, что $\left(\frac{1}{a} e_1 + e_{m+1}\right) \wedge (e_2 + a e_{m+2}) \wedge \ldots \wedge (e_m + a e_{2m}) = x_{(t-1)m+1} \wedge \ldots \wedge x_{tm}$ для некоторого t, $1 \leqslant t \leqslant k$. Значит, $1/a \in A$, и, следовательно, a обратим.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Б. Клейнер, О плюккеровых свойствах колец, Матем. сб. **84** (**126**) (1971), 526—536.

[2] М. Е. Котлярский, Два замечания о плюккеровых кольцах, УМН **30** : 2 (1975), 213—214.

[3] H. Busemann, D. E. Glassco II, Irreducible sums of simple multivectors, Pacific J. Math. 49 : 1 (1973), 13—32.

Поступило в Правление общества 18 ноября 1975 г.