О РАЗЛОЖИМОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ ВНЕШНЕЙ АЛГЕБРЫ СВОБОДНОГО МОДУЛЯ

Г. Б. Клейнер

1. Как известно, для полной разложимости m-вектора $\omega \in \Lambda^m(U_n)$, где U_n — n-мерное векторное пространство над полем A, необходимо и достаточно выполнение соотношений Плюккера между координатами ω. Если же A — коммутативное целостное кольцо с 1, то условия Плюккера, оставаясь необходимыми, уже недостаточны для полной разложимости ω. Здесь для случая кольца Крулля рассматривается следующая задача: найти необходимые и достаточные условия представимости плюккерова (т. е. удовлетворяющего условиям Плюккера) m-вектора ω в виде $\omega = \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k$, где $\omega_i \in \Lambda^{m_i}(U_n)$ — плюккеров m_i-вектор ($i = 1, \ldots, k$), причем $m_1, \ldots, m_k$ предполагаются заданными.

Пусть T — A-модуль без кручения и M — его подмодуль. Замыкание $\widetilde{M}$ модуля M в T определяется как множество тех $x \in T$, для которых существует $a \neq 0$ из A так, что $ax \in M$; M называется замкнутым в T, если $\widetilde{M} = M$. Пусть M — подмодуль ранга m в U_n. Существует канонический гомоморфизм $\Lambda^m(M)$ в $\Lambda^m(U_n)$. Обозначим через $\Omega(M)$ замыкание образа $\Lambda^m(M)$ в $\Lambda^m(U_n)$.

Определение. Модуль M называется *факториальным*, если $\Omega(M) \cong A$.

Примеры факториальных модулей: 1) если A — кольцо Крулля, то замкнутый свободный подмодуль в U_n факториален; 2) если A — факториальное кольцо, то любой подмодуль в U_n факториален. Пусть $\operatorname{div}\omega$ — дивизор идеала, порожденного в A координатами ω, и $K_\omega = \{x \in U_n\colon x \wedge \omega = 0\}$.

Лемма 1. *Пусть A — кольцо Крулля, U_n — свободный A-модуль ранга n, $F_i = Ax_{i1} \oplus \ldots \oplus Ax_{im_i}$ — подмодуль в U_n ($i=1, \ldots, k$), причем $F_1 + \ldots + F_k$ — прямая сумма. Тогда если $\widetilde{F_1 \oplus \ldots \oplus F_k} = \widetilde{F}_1 \oplus \ldots \oplus \widetilde{F}_k$, то $\operatorname{div}(x_{11} \wedge \ldots \wedge x_{1m_1} \wedge \ldots \wedge x_{k1} \wedge \ldots \wedge x_{km_k}) = \operatorname{div}(x_{11} \wedge \ldots \wedge x_{1m_1}) \ldots \operatorname{div}(x_{k1} \wedge \ldots \wedge x_{km_k})$.*

Доказательство этой леммы существенно использует лемму 1 из [2].

Теорема 1. *Пусть A — кольцо Крулля, U_n — свободный A-модуль ранга n и $\omega \in \Lambda^m(U_n)$ — плюккеров вектор. Если $\omega = \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k$, где $\omega_i \in \Lambda^{m_i}(U_n)$ — плюккеровы векторы и $\operatorname{div}\omega = \operatorname{div}\omega_1 \ldots \operatorname{div}\omega_k$, то $K_\omega = K_{\omega_1} \oplus \ldots \oplus K_{\omega_k}$. Верно и некоторое обращение этого утверждения: если $K_\omega = M_1 \oplus \ldots \oplus M_k$ и все модули M_i, кроме, возможно, одного, факториальны, то существуют плюккеровы $\omega_i \in \Lambda^{m_i}(U_n)$ (m_i — ранг M_i ($i=1, \ldots, k$)) такие, что $\omega = \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k$, причем $\operatorname{div}\omega = \operatorname{div}\omega_1 \ldots \operatorname{div}\omega_k$.*

Доказательство. Покажем, что прямую часть теоремы достаточно доказать в предположении, что A — кольцо главных идеалов. Заметим, что условия этой части теоремы сохраняются при локализации по любому простому идеалу из A. Предположим, что для любого $\mathfrak{p} \in P$ (где P — множество всех простых идеалов в A высоты 1) $K_{\omega, \mathfrak{p}} = K_{\omega_1, \mathfrak{p}} \oplus \ldots \oplus K_{\omega_k, \mathfrak{p}}$. Нетрудно доказать, что для всякого замкнутого модуля M над кольцом Крулля $\bigcap_{\mathfrak{p} \in P} M_{\mathfrak{p}} = M$. Поэтому $K_\omega = \bigcap_{\mathfrak{p} \in P} (K_{\omega_1, \mathfrak{p}} \oplus \ldots \oplus K_{\omega_k, \mathfrak{p}}) = K_{\omega_1} \oplus \ldots \oplus K_{\omega_k}$. Таким образом, мы вправе предположить временно, что A — кольцо главных идеалов. Пусть $\omega' = \dfrac{\omega}{\operatorname{div}\omega}$ и $\omega_i' = \dfrac{\omega_i}{\operatorname{div}\omega_i}$. Так как в кольце главных идеалов всякий плюккеров вектор вполне разложим [3], то $\omega_i' = x_{i1} \wedge \ldots \wedge x_{im_i}$, где $x_{ij} \in K_{\omega_i}$, причем $x_{i1}, \ldots, x_{im_i}$ свободно порождают K_{ω_i} в силу равенства $\operatorname{div}\omega_i' = 1$. Но $\omega' = \omega_1' \wedge \ldots \wedge \omega_k'$ и $\operatorname{div}\omega' = 1$, поэтому $x_{11}, \ldots, x_{km_k}$ в совокупности свободно порождают K_ω, откуда $K_\omega = K_{\omega_1} \oplus \ldots \oplus K_{\omega_k}$.

Обратно, пусть $K_\omega = M_1 \oplus \ldots \oplus M_k$ и, скажем, $M_1, \ldots, M_{k-1}$ — факториальные модули. Из факториальности M_i следует существование $\omega_i \in \Omega(M_i)$ ($i=1, \ldots, k-1$)

с $\operatorname{div}\omega_i = 1$. Рассмотрим $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_{k-1} \wedge x_1 \wedge \ldots \wedge x_{m_k}$, где $x_1, \ldots, x_{m_k}$ — произвольные линейно независимые элементы из M_k. С точностью до некоторого $a_i \neq 0$ из A каждый ω_i $(i = 1, \ldots, k-1)$ вполне разложим, причем если F_i — подмодуль в U_n, порожденный векторами разложения ω_i, то $\widetilde{F_1 \oplus \ldots \oplus F_k} = K_\omega = K_{\omega_1} \oplus \ldots \oplus K_{\omega_k} = \widetilde{F}_1 \oplus \ldots \oplus \widetilde{F}_k$. Поэтому для некоторых $a, b \in A$ в силу леммы 1 $\operatorname{div}\left(\frac{a}{b}\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_{k-1} \wedge x_1 \wedge \ldots \wedge x_{m_k}\right) = \operatorname{div}\omega = \frac{a}{b}\operatorname{div}\omega_1 \ldots \operatorname{div}\omega_{k-1}\operatorname{div}(x_1 \wedge \ldots \wedge x_{m_k})$, а так как $\operatorname{div}\omega_1 = \ldots = \operatorname{div}\omega_k = 1$, то $\operatorname{div}\omega = \frac{a}{b}\operatorname{div}(x_1 \wedge \ldots \wedge x_{m_k})$. Если теперь положить $\omega_k = \frac{a}{b} x_1 \wedge \ldots \wedge x_{m_k}$, то $\omega = \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k$, где $\omega_i \in \Lambda^{m_i}(U_n)$ $(i = 1, \ldots, k)$ и $\operatorname{div}\omega = \operatorname{div}\omega_1 \ldots \operatorname{div}\omega_k$.

Следствие 1. *В предположениях теоремы* 1 *следующие условия эквивалентны*: (а) *существуют разложимый k-вектор ω_1 и плюккеров $m-k$-вектор ω_2 такие, что $\omega = \omega_1 \wedge \omega_2$ и $\operatorname{div}\omega = \operatorname{div}\omega_2$*, (б) *$K_\omega \cong A^k \oplus M$, где M — некоторый A-модуль.*

Следствие 2. *Пусть A — факториальное кольцо, U_n — свободный A-модуль ранга n, $\omega \in \Lambda^m(U_n)$ — плюккеров вектор. Следующие условия эквивалентны*: (а) *существуют плюккеровы векторы $\omega_i \in \Lambda^{m_i}(U_n)$ такие, что $\omega = \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k$ и $\operatorname{div}\omega = \operatorname{div}\omega_1 \ldots \operatorname{div}\omega_k$*, (б) *$K_\omega = K_{\omega_1} \oplus \ldots \oplus K_{\omega_k}$, где M_i — A-модуль ранга m_i.*

Следствие 3. *Пусть A — кольцо Крулля, U_n — свободный A-модуль ранга n, $\omega_1 \in \Lambda^{m_1}(U_n)$, $\omega_2 \in \Lambda^{m_2}(U_n)$ — плюккеровы векторы и $\omega = \omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0$. Тогда $\operatorname{div}(\omega_1 \wedge \omega_2) = \operatorname{div}\omega_1 \operatorname{div}\omega_2$, если и только если $K_\omega = K_{\omega_1} \oplus K_{\omega_2}$.*

2. Кольцо A называется *плюккеровым*, если всякий плюккеров m-вектор $\omega \in \Lambda^m(U_n)$ для любых $n > m > 0$ вполне разложим. Если это свойство выполнено для всякого $m > 0$ и $n = m + 1$, то кольцо называется *OP-кольцом*. Существуют OP-кольца, не являющиеся плюккеровыми, например, кольцо $A = \mathbf{Z}(\sqrt{d})$, где d — целое число, свободное от квадратов и такое, что $d \equiv 1 \pmod 4$.

Теорема 2. *Пусть A — кольцо Крулля. Тогда следующие условия эквивалентны*: (а) *A — OP-кольцо*, (б) *A — плюккерово.*

Ясно, что в доказательстве нуждается лишь импликация (а) $\Rightarrow$ (б). Основой доказательства является следующая

Лемма 2. *Пусть A — кольцо Крулля, U_4 — свободный A-модуль ранга 4 и $\omega \in \Lambda^2(U_4)$. Тогда существуют свободный A-модуль F и 3-вектор $\omega_1 \in \Lambda^3(U_4)$ такие, что $K_\omega \oplus F = K_{\omega_1}$.*

Для нетеровых колец вопрос о соотношении OP и плюккеровости решает

Теорема 3. *Пусть A — целостное нетерово OP-кольцо. Тогда следующие условия эквивалентны*: (а) *A плюккерово*, (б) *A целозамкнуто*, (в) *A регулярно*, (г) *h-$\dim A \leqslant 2$.*

Эквивалентность условий (б), (в) и (г) следует из результатов, полученных в [1] и [4]; (а) $\Rightarrow$ (в) так как нетерово плюккерово кольцо регулярно [3]; (б) $\Rightarrow$ (а) является следствием теоремы 2.

Итак, доказана гипотеза, высказанная в [4] Лисснером и Герамитой.

ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Towber, Complete reducibility in exterior algebras over free modules, J. Algebra **10**:3 (1968), 299—309.

[2] Г. Б. Клейнер, О плюккеровых свойствах колец, Матем. сб. **84** (**126**):4 (1971), 526—536.

[3] A. Simis, When are projective modules free? Queen's Papers in Pure and Appl. Math **21** (1969), 1—254.

[4] D. Lissner, A. Geramita, Remarks on OP and Towber rings, Can. J. Math **22**:6 (1970), 1109—1117.

Поступило в Правление общества 25 января 1971 г.