УДК 512.552

Г. Б. Клейнер

Поливекторы ранга 2 над полями и коммутативными кольцами

В работе изучается следующий вопрос: когда однородный элемент грассмановой алгебры представим в виде суммы двух разложимых элементов? Для внешней алгебры *над полем* получены необходимые и достаточные условия такого представления, *над произвольным целостным кольцом* – ряд необходимых условий, а *над кольцами Крулля* – также и ряд достаточных условий. В частности, установлено, что единственными кольцами, над которыми проверка 2-разложимости проводится так же, как над полями, являются поля, т.е. “2-плюккеровых” колец не существует.

Библиография: 11 названий.

§ 1. Введение

Пусть A – коммутативное кольцо с единицей, A^n – свободный A-модуль ранга n с базисом $e_1, \dots, e_n$ и $\Lambda^m(A^n)$ – его внешняя степень. Совокупность внешних произведений $\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_m}\}$, $1 \leqslant i_1 < \dots < i_m \leqslant n$, базисных элементов модуля A^n образует базис свободного A-модуля $\Lambda^m(A^n)$, поэтому всякий m-вектор $\omega \in \Lambda^m(A^n)$ однозначно представим в виде

$$\omega = \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_m \leqslant n} a_{i_1 \dots i_m} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_m}, \tag{1}$$

где $a_{i_1 \dots i_m} \in A$.

Во многих случаях, однако, удобнее записывать ω не в виде линейной комбинации элементов индуцированного базиса $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_m}$ (такое представление, конечно, зависит от выбора базиса $e_1, \dots, e_n$ в A^n), а в виде суммы наименьшего числа произвольных разложимых m-векторов

$$\omega = x_1^1 \wedge \dots \wedge x_m^1 + \dots + x_1^k \wedge \dots \wedge x_m^k. \tag{2}$$

Это представление (оно называется *минимальным разложением поливектора*, а число слагаемых k – его *рангом*) позволяет вычислить ряд важных инвариантов m-вектора, в частности найти размерность наименьшего подпространства (в случае, когда A – поле), m-я степень которого содержит данный поливектор.

Настоящая работа посвящена вопросам вычисления ранга и минимального разложения поливекторов, в основном над полями и кольцами Крулля.

Первые результаты, касающиеся определения ранга m-векторов, принадлежат Плюккеру [1] и Сегре [2]. Они доказали, что в случае поля необходимым и достаточным условием разложимости m-вектора $\omega \in \Lambda^m(A^n)$ является выполнение так называемых соотношений Плюккера

$$\sum_{s=0}^{m}(-1)^s a_{i_1\dots i_{m-1}j_s}a_{j_0\dots j_{s-1}j_{s+1}\dots j_m}=0,\quad 1\leqslant i_1,\dots,i_{m-1},j_0,\dots,j_m\leqslant n, \quad (3)$$

между его координатами. Найти аналогичные соотношения, выделяющие класс m-векторов ранга не больше k при $k>1$, удавалось лишь для $m=2$ [3]. В 1973 г. Буземан и Глазго доказали [4], что если $A=\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, то множество m-векторов ранга $\leqslant k$ при $k>1$, $m>2$ не является ни алгебраическим, ни даже замкнутым множеством, следовательно, аналога соотношений Плюккера в этом случае нет. Известно, однако, что соотношения (3) эквивалентны условию (см. [5])

$$\operatorname{rank} B_0(\omega)=m, \quad (4)$$

где $B_0(\omega)=\{x\in A^n : x\wedge\omega=0\}$.

Поэтому естественно пытаться охарактеризовать класс k-разложимых m-векторов при $k>1$ с помощью аналогичных (4) условий на некоторые связанные с m-вектором и в принципе вычислимые модули.

Для $k=2$ и произвольного m соответствующий результат анонсирован автором [6]. Именно пусть $E_1(\omega)$ – подпространство, порожденное теми $x\in A^n$, для которых $\operatorname{rank}(x\wedge\omega)\leqslant 1$. Тогда для 2-разложимости ω необходимо и достаточно, чтобы

$$\dim B_0(\omega)+\dim E_1(\omega)=2m. \quad (5)$$

При $k>2$, $m>2$ вопрос об условиях, необходимых и достаточных для k-разложимости m-вектора, остается открытым даже в случае полей.

Пусть теперь A – целостное коммутативное кольцо. Естественное вложение $A\subset \operatorname{Fr}(A)$ кольца A в его поле частных позволяет рассматривать всякий m-вектор $\omega\in\Lambda^m(A^n)$ как элемент $\Lambda^m(\operatorname{Fr}(A)^n)$; при этом, очевидно, разложимый над A m-вектор разложим и над $\operatorname{Fr}(A)$. Следовательно, соотношения Плюккера (и эквивалентное им условие (4)), а также равенство (5) являются необходимыми условиями соответственно для 1- и 2-разложимости.

Таубер [7] рассматривал кольца, в которых соотношения Плюккера являются также и достаточными для разложимости (эти кольца получили название плюккеровых). Было доказано, что такими являются одно- и двумерные локальные кольца, дедекиндовы кольца и кольцо многочленов от одной переменной над дедекиндовым кольцом. Среди ненётеровых плюккеровых колец можно назвать кольца Безу.

Таким образом, существует широкий класс колец, для которых проверка 1-разложимости поливектора проводится так же, как и в полях (например, с помощью соотношений (3) или (4)). В настоящей работе доказывается теорема 4.1, согласно которой эта ситуация не продолжается на случай 2-разложимости: единственными кольцами, в которых множество 2-разложимых m-векторов над кольцом совпадает с множеством 2-разложимых m-векторов над полем частных (“2-плюккеровы кольца”), являются поля. Поэтому при $k = 2$ особый интерес представляют условия “индивидуальной” k-разложимости m-векторов над кольцом, специфические для данного класса колец и дополняющие необходимые условия 2-разложимости (5).

Для $k = 1$ в этом направлении известны следующие результаты.

Теорема 1.1 [8]. *Пусть A – коммутативное кольцо, $\omega \in \Lambda^m(A^n)$ – m-вектор. Если $B_0(\omega)$ – свободный модуль ранга m, то* $\operatorname{rank}\omega = 1$.

Поливектор ω называется *примитивным*, если дивизор идеала, порожденный его координатами, равен 1.

Теорема 1.2 [9]. *Пусть A – кольцо Крулля, ω – примитивный m-вектор. Для того чтобы* $\operatorname{rank}\omega = 1$, *необходимо и достаточно, чтобы $B_0(\omega)$ был свободным A-модулем ранга m.*

В настоящей работе получены аналогичные результаты (теоремы 5.1 и 5.2) для $k = 2$.

Работа состоит из пяти параграфов.

В §2 исследуется множество $B_1(\omega) = \{x \in A^n : \operatorname{rank}(x \wedge \omega) \leqslant 1\}$ для m-векторов ранга 2 и устанавливается его связь с подпространствами, порожденными векторами минимального разложения ω. Этот результат используется в §3 для вывода теоремы единственности минимального разложения m-векторов ранга 2. Параграф 4 содержит полное доказательство необходимого и достаточного условия (5) 2-разложимости поливекторов вида $\omega = x_1 \wedge \dots \wedge x_{m-2} \wedge \omega'$, где $x_i \in A$, $\omega' \in \Lambda^2(A^n)$, над плюккеровыми кольцами. Здесь же доказывается теорема несуществования 2-плюккеровых колец. Параграф 5 посвящен доказательству условий 2-разложимости m-векторов, не представимых в виде $\omega = x_1 \wedge \dots \wedge x_{m-2} \wedge \omega'$, где ω' – 2-вектор, над кольцами Крулля.

Фиксируем следующие обозначения: A – целостное коммутативное кольцо; $\operatorname{Fr}(A)$ – его поле частных; A^n – свободный A-модуль ранга n с образующими $e_1, \dots, e_n$; M – подмодуль в A^n; $\Lambda^m(M)$ – образ в $\Lambda^m(A^n)$ m-й внешней степени модуля M при отображении $\Lambda^m\varepsilon$, где ε – вложение M в A^n; ω – m-вектор из $\Lambda^m(A^n)$; $\widehat{x}$ – внешнее произведение элементов $x_1, \dots, x_n \in A^n$; X – порожденный ими подмодуль; $\{a_1, \dots, a_n\}$ – множество, состоящее из элементов $a_1, \dots, a_n$; $B_0(\omega) = \{x \in A^n : x \wedge \omega = 0\}$; $b_0(\omega) = \operatorname{rank} B_0(\omega)$; $B_1(\omega) = \{x \in A^n : x \wedge \omega$ – плюккеров $(m+1)$-вектор$\}$; $b_1(\omega) = \operatorname{rank} B_1(\omega)$; $E_0(\omega) = B_0(\omega)$; $E_1(\omega)$ – подмодуль в A^n, порожденный множеством $B_1(\omega)$; $\omega_1 \parallel \omega_2$ – существует ненулевой элемент $\alpha \in \operatorname{Fr}(A)$, для которого $\alpha\omega_1 = \omega_2$ $(\omega_1, \omega_2 \in \Lambda^m(A^n))$; $\operatorname{Supp}\omega = \inf\{M - \text{подмодуль в } A^n : \omega \in \Lambda^m(M)\}$; $\widetilde{M} = \inf\{M' - \text{подмодуль в } A^n : M \subset M',\ A^n/M' \text{ не имеет кручения}\}$; $\operatorname{div}\omega$ – дивизор идеала, порожденного координатами ω.

§ 2. Строение множества $B_1(\omega)$

Лемма 2.1 [10; теорема 4]. *Пусть A – поле, $\omega \in \Lambda^m(A^n)$ – m-вектор ранга k, $\omega = \widehat{x}_1 + \dots + \widehat{x}_k$. Тогда $B_0(\omega) = X_1 \cap \dots \cap X_k$.*

Другими словами, всякий m-вектор ω с $b_0(\omega) \neq 0$ представим в виде $\omega = b \wedge \omega'$, где b – произведение всех векторов какого-то базиса пространства $B_0(\omega)$, а ω' – $(m - b_0(\omega))$-вектор того же ранга, что и ω, причем $b_0(\omega') = 0$.

Если A – поле, $\omega \in \Lambda^m(A^n)$, то носитель m-вектора ω ($\operatorname{Supp}\omega$), очевидно, существует и единственен.

Лемма 2.2 [6; лемма 1]. *Пусть A – поле, $\omega \in \Lambda^m(A^n)$ – m-вектор ранга k, $\omega = \widehat{x}_1 + \dots + \widehat{x}_k$. Тогда $\operatorname{Supp}\omega = X_1 + \dots + X_k = E_{k-1}(\omega)$.*

Отсюда следует

Лемма 2.3. *Пусть A – поле, $\omega \in \Lambda^m(A^n)$, $y_1, \dots, y_s$ – линейно независимые векторы из A^n, причем порожденное ими подпространство Y имеет нулевое пересечение с $\operatorname{Supp}\omega$. Тогда $\operatorname{rank}(y_1 \wedge \dots \wedge y_s \wedge \omega) = \operatorname{rank}\omega$.*

Предложение 2.1. *Пусть A – поле, $\omega \in \Lambda^m(A^n)$ – m-вектор ранга 2, $\omega = \widehat{x}_1 + \widehat{x}_2$. Тогда если $b_0(\omega) = m - 2$, то $B_1(\omega) = X_1 + X_2$, в противном случае $B_1(\omega) = X_1 \cup X_2$.*

Доказательство. Пусть $\operatorname{rank}\omega = 2$. По лемме 1.1 можно считать

$$\omega = w_1 \wedge \dots \wedge w_{b_0} \wedge (v_1^1 \wedge \dots \wedge v_{m-b_0}^1 + v_1^2 \wedge \dots \wedge v_{m-b_0}^2),$$

где векторы w_i, v_j^1, v_k^2 линейно независимы в совокупности.

Пусть $z \in B_1(\omega)$. Так как $B_1(\omega) \subset \operatorname{Supp}\omega = X_1 + X_2$, то $z = z_\omega + z_1 + z_2$, где z_ω лежит в линейном пространстве $B_0(\omega)$ с базисом $\{w_i\}$, а z_j, $j = 1, 2$, лежит в линейном пространстве, порожденном $\{v_k^j\}$. Имеем:

$$z_\omega = \pm\widehat{w} \wedge (z_1 \wedge \widehat{v}^1 + z_2 \wedge \widehat{v}^2).$$

Поскольку этот поливектор должен иметь единичный ранг, то единичный ранг должен иметь и вектор $z_1 \wedge \widehat{v}^1 + z_2 \wedge \widehat{v}^2$, откуда получаем равенство

$$B_1(\omega) = Aw \oplus B_1(\widehat{v}^1 + \widehat{v}^2).$$

Теперь вопрос сводится к изучению векторов ω вида $\omega = \widehat{v}^1 + \widehat{v}^2$, т.е. к случаю $b_0 = 0$. Достаточно доказать, что для такого ω

$$B_1(\omega) = \begin{cases} Av^1 + Av^2, & m = 2, \\ Av^1 \cup Av^2, & m \neq 2. \end{cases}$$

При $m = 0, 1$ поливектор ω нулевой или плюккеров, и утверждение очевидно.

Пусть $m \geqslant 2$. Легко проверить непосредственно, что $X_1 \cup X_2 \subset B_0(\omega)$. Предположим, что z – произвольный вектор из $X_1 + X_2$, не лежащий в $X_1 \cup X_2$. С точностью до замены базиса в пространствах X_1 и X_2 можно считать $z_1 = v_1^1$ и $z_2 = v_1^2$. Тогда при $m = 2$ получаем:

$$z \wedge \omega = z_1 \wedge \widehat{v}^1 + z_2 \wedge \widehat{v}^2 = v_1^1 \wedge v_1^2 \wedge v_2^2 - v_1^1 \wedge v_1^2 \wedge v_2^1 = v_1^1 \wedge v_1^2 \wedge (v_2^2 - v_2^1),$$

т.е. $X_1 + X_2 \subset B_0(\omega)$. Если же $m > 2$, то

$$z \wedge \omega = v_1^1 \wedge v_1^2 \wedge (v_2^2 \wedge \dots \wedge v_m^2 - v_2^1 \wedge \dots \wedge v_m^1),$$

т.е. $z \wedge \omega$ – не плюккеров вектор.

Замечание. Отметим один из пунктов доказательства: если $\operatorname{rank}\omega = 2$, то $b_0(\omega) \leqslant m - 2$.

Пусть теперь A – произвольное коммутативное кольцо, $\omega \in \Lambda^m(A^n)$. В этом случае множество $c_1(\omega) = \{x \in A^n : x \wedge \omega$ – разложимый $(m+1)$-вектор$\}$ не совпадает, вообще говоря, с множеством $B_1(\omega) = \{x \in A^n : x \wedge \omega$ – плюккеров $(m+1)$-вектор$\}$. Однако если $b_0(\omega) < m - 2$, то эти множества одинаковы.

Следствие 2.1. *Пусть A – коммутативное кольцо, $\omega \in \Lambda^m(A^n)$ – m-вектор ранга 2, причем $b_0(\omega) < m - 2$. Тогда $B_1(\omega) = c_1(\omega) = \widetilde{X}_1 \cap \widetilde{X}_2$.*

Доказательство. Рассмотрим ω как вектор над $\operatorname{Fr}(A)$ и обозначим через $\operatorname{rank}_{\operatorname{Fr}}\omega$ его ранг как элемента $\Lambda^m(\operatorname{Fr}(A)^n)$. Пусть $B_1^{\operatorname{Fr}}(\omega) = \{x \in A^n : x \wedge \omega$ – плюккеров $(m+1)$-вектор в $\Lambda^{m+1}(\operatorname{Fr}(A)^n)\}$. Тогда $B_1(\omega) = B_1^{\operatorname{Fr}}(\omega) \cap A^n$. Если $\operatorname{rank}_{\operatorname{Fr}}\omega = 1$, то $b_0(\omega) = m$, что противоречит условию. Следовательно, $\operatorname{rank}_{\operatorname{Fr}}\omega = 2$. В силу предложения 2.1 $B_1^{\operatorname{Fr}}(\omega) = \operatorname{Fr} X_1 \cup \operatorname{Fr} X_2$, где $\operatorname{Fr} X_i$ – подпространство, порожденное в $\operatorname{Fr}(A)^n$ векторами разложения $\widehat{x}_i$, $i = 1, 2$. Значит, $B_1(\omega) = B_1^{\operatorname{Fr}}(\omega) \cap A^n = (\operatorname{Fr} X_1 \cap A^n) \cup (\operatorname{Fr} X_1 \cap A^n) = \widetilde{X}_1 \cup \widetilde{X}_2$.

Далее, $c_1(\omega)$ всегда лежит в $B_1(\omega)$. Пусть $x \in B_1(\omega)$. Тогда $x \in \widetilde{X}_1 \cup \widetilde{X}_2$; предположим, что $x \in \widetilde{X}_1$. Тогда $x = y/a$, где $y \in X_1$, $a \in A$, $a \neq 0$. Теперь $x \wedge w = x \wedge \widehat{x}_2$ – разложимый $(m+1)$-вектор. Таким образом, $B_1(\omega) \subset c_1(\omega)$ и, следовательно, $B_1(\omega) = c_1(\omega) = \widetilde{X}_1 \cup \widetilde{X}_2$.

§ 3. Единственность минимального разложения m-векторов ранга 2

Пусть ω – m-вектор ранга k над коммутативным кольцом. Скажем, что минимальное разложение ω единственно, если из равенств

$$\omega = \widehat{x}_1 + \dots + \widehat{x}_k = \widehat{y}_1 + \dots + \widehat{y}_k,$$

где $\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_k, \widehat{y}_1, \dots, \widehat{y}_k$ – разложимые m-векторы, вытекает, что $\widehat{y}_{\pi(i)} = \widehat{x}_i$, $i = 1, \dots, k$, для некоторой перестановки π на множестве $\{1, 2, \dots, k\}$.

Теорема 3.1. *Пусть A – поле, $\omega \in \Lambda^m(A^n)$ – m-вектор ранга 2. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(а) $b_0(\omega) \neq m - 2$;

(б) *минимальное разложение поливектора ω единственно.*

Доказательство. Как следует из леммы 2.1, всякое минимальное разложение имеет вид $\omega = \widehat{w}_0 \wedge (\widehat{w}_1 + \widehat{w}_2)$, где $\widehat{w}_0$ – произведение каких-то базисных векторов пространства $B_0(\omega)$, а все компоненты поливекторов $\widehat{w}_1, \widehat{w}_2$ линейно независимы и не лежат в $B_0(\omega)$. Поскольку $\widehat{w}_0$ определяется однозначно с точностью до скалярного множителя, достаточно доказывать единственность (или не единственность) второго сомножителя, т.е. рассматривать случай вектора ω, для которого $b_0(\omega) = 0$.

Пусть $m = 2$. Тогда $\omega = w_1^1 \wedge w_2^1 + w_1^2 \wedge w_2^2 = w_1^1 \wedge (w_2^1 + w_2^2) + (w_1^2 - w_1^1) \wedge w_2^2$. Из линейной независимости компонент поливекторов $\widehat{w}_1, \widehat{w}_2$ получаем, что разложение неединственно.

Пусть теперь $m > 2$. Предположим, что $\omega = \widehat{w}_1 + \widehat{w}_2 = \widehat{v}_1 + \widehat{v}_2$. Имеем:

$$0 = B_0(\omega) = \operatorname{Supp}\widehat{w}_1 \cap \operatorname{Supp}\widehat{w}_2 = \operatorname{Supp}\widehat{v}_1 \cap \operatorname{Supp}\widehat{v}_2,$$

но по предложению 1.1

$$B_1(\omega) = \operatorname{Supp}\widehat{w}_1 \cup \operatorname{Supp}\widehat{w}_2 = \operatorname{Supp}\widehat{v}_1 \cup \operatorname{Supp}\widehat{v}_2,$$

откуда с точностью до перестановки слагаемых получаем, что $\widehat{v}_1 = \alpha\widehat{w}_1, \widehat{v}_2 = \beta\widehat{w}_2$, где $\alpha, \beta \in A$. Из линейной независимости поливекторов $\widehat{w}_1, \widehat{w}_2$ получаем, что $\alpha = \beta = 1$.

Следствие 3.1. *Пусть A – произвольное коммутативное целостное кольцо, $\omega \in \Lambda^m(A^n)$ – m-вектор ранга 2. Если $b_0(\omega) \neq m - 2$, то минимальное разложение ω единственно.*

Доказательство. Пусть $\omega = \widehat{x}_1 + \widehat{x}_2 = \widehat{y}_1 + \widehat{y}_2$, где $\widehat{x}_i, \widehat{y}_i$ – разложимые m-векторы, $i = 1, 2$. Вложив $\Lambda^m(A^n)$ в $\Lambda^m(\mathrm{Fr}^n)$, получим два разложения m-вектора над полем $\mathrm{Fr}(A)$. Применяя теорему 3.1 и учитывая, что ранг $B_0(\omega)$ равен размерности пространства $\{x \in \mathrm{Fr}^n : x \wedge \omega = 0\}$, заключаем, что эти разложения совпадают в $\Lambda^m(\mathrm{Fr}^n)$, а следовательно, и в $\Lambda^m(A^n)$.

Лемма 3.1. *Пусть P_1, P_2, Q_1, Q_2 – группы, причем ни одно из множеств P_1, P_2 и Q_1, Q_2 не лежит в другом. Если $P_1 \cup P_2 = Q_1 \cup Q_2$, то $P_i = Q_{\pi(i)}$ для некоторой перестановки π на множестве $\{1, 2\}$.*

Из предложения 2.1 и теоремы 3.1 видно, что множества $B_0(\omega)$ и $B_1(\omega)$ несут довольно полную информацию о минимальном разложении m-вектора ω ранга 2. Точная формулировка соответствующего результата такова.

Предложение 3.1. *Пусть A – коммутативное кольцо, $\omega = \widehat{x}_1 + \widehat{x}_2$, $\omega' = \widehat{x}'_1 + \widehat{x}'_2$ – m-векторы ранга 2, причем $\operatorname{rank} B_0(\omega) < m - 2$. Следующие условия эквивалентны*:

(а) $\widehat{x}_i \parallel \widehat{x}'_{\pi(i)}$, *где π – некоторая перестановка на множестве* $\{1, 2\}$;
(б) $B_1(\omega) = B_1(\omega')$;
(в) $B_0(\omega) = B_0(\omega')$, $B_1(\omega) = B_1(\omega')$.

Доказательство. (а)$\Rightarrow$(б). Если $\widehat{x}_i \parallel \widehat{x}'_{\pi(i)}$, то $\widetilde{X}_i = \widetilde{X}'_{\pi(i)}$, $i = 1, 2$. Поэтому $B_0(\omega) = \widetilde{X}_1 \cap \widetilde{X}_2 = \widetilde{X}'_1 \cap \widetilde{X}'_2 = B_0(\omega')$ (лемма 2.1), $B_1(\omega) = \widetilde{X}_1 \cup \widetilde{X}_2 = \widetilde{X}'_1 \cup \widetilde{X}'_2 = B_1(\omega')$ (следствие 2.1).

(б)$\Rightarrow$(а). $B_1(\omega) = \widetilde{X}_1 \cup \widetilde{X}_2 = B_1(\omega') = \widetilde{X}'_1 \cup \widetilde{X}'_2$. Так как $\operatorname{rank} \widetilde{X}_i = \operatorname{rank} \widetilde{X}'_i = m$, $i = 1, 2$, то из включения $\widetilde{X}_1 \subset \widetilde{X}_2$ (или из включения $\widetilde{X}'_1 \subset \widetilde{X}'_2$) следовало бы, что $\widetilde{X}_1 = \widetilde{X}_2$ (соответственно $\widetilde{X}'_1 = \widetilde{X}'_2$). В свою очередь, это означает, что $\widehat{x}_1 \parallel \widehat{x}_2$ (или $\widehat{x}'_1 \parallel \widehat{x}'_2$). Но тогда $\operatorname{rank} B_0(\omega) = \operatorname{rank} B_0(\omega') = m$, что противоречит условию. Следовательно, к модулям $\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2, \widetilde{X}'_1, \widetilde{X}'_2$ применима лемма 3.1, в силу которой $\widetilde{X}_i = \widetilde{X}'_{\pi(i)}$ для некоторой перестановки π на множестве $\{1, 2\}$. Отсюда $\widehat{x}_i \parallel \widehat{x}'_{\pi(i)}$ для $i = \{1, 2\}$.

(в)$\Rightarrow$(б). Очевидно.

(а)$\Rightarrow$(в). Если $\widehat{x}_i \parallel \widehat{x}'_{\pi(i)}$ для некоторой перестановки π, то $\widetilde{X}_i = \widetilde{X}'_{\pi(i)}$, $i = \{1, 2\}$. Поэтому $B_0(\omega) = \widetilde{X}_1 \cap \widetilde{X}_2 = \widetilde{X}'_1 \cap \widetilde{X}'_2 = B_0(\omega')$, $B_1(\omega) = \widetilde{X}_1 \cup \widetilde{X}_2 = \widetilde{X}'_1 \cup \widetilde{X}'_2 = B_1(\omega')$.

§ 4. Поливекторы ранга 2 над полем. "2-плюккеровых" колец не существует

В этом параграфе полностью решается вопрос о необходимых и достаточных условиях 2-разложимости произвольного m-вектора $\omega \in \Lambda^m(A^n)$, где A – поле, и доказывается, что единственными кольцами, в которых $\operatorname{rank}_{\mathrm{Fr}} \omega = \operatorname{rank} \omega$, являются поля.

Теорема 4.1. *Пусть A – коммутативное кольцо. Следующие условия эквивалентны*:

(а) *кольцо A является полем*;

(б) *необходимым и достаточным условием 2-разложимости произвольного m-вектора $\omega \in \Lambda^m(A^n)$ является равенство $b_0(\omega) + b_1(\omega) = 2m$*;

(в) $\operatorname{rank} \omega = \operatorname{rank}_{\mathrm{Fr}} \omega$ *для любого m-вектора $\omega \in \Lambda^m(A^n)$, у которого* $\operatorname{rank}_{\mathrm{Fr}} \omega = 2$;

(г) $\operatorname{rank} \omega = \operatorname{rank}_{\mathrm{Fr}} \omega$ *для любого m-вектора $\omega \in \Lambda^m(A^n)$*.

Доказательство. (а)$\Rightarrow$(б). Ввиду леммы 2.1 2-разложимость поливектора ω равносильна 2-разложимости фигурирующего в этой лемме поливектора ω', а равенство $b_0(\omega) + b_1(\omega) = 2m$ равносильно равенству $b_1(\omega') = 2(m - b_0(\omega))$. Таким образом, достаточно доказать утверждение для поливектора ω', т.е. ограничиться рассмотрением таких векторов ω, что $b_0(\omega) = 0$.

Если такой поливектор 2-разложим, то он представим в виде $\omega = \widehat{x} + \widehat{y}$, где $\operatorname{Supp} \widehat{x} \cap \operatorname{Supp} \widehat{x} = 0$. Значит, $b_1(\omega) = \dim \operatorname{Supp} \omega = 2m$.

Докажем обратное утверждение. Более того, мы докажем, что если $b_1(\omega) \geqslant 2m$, то $\operatorname{rank} \omega \leqslant 2$.

По условию в пространстве $B_1(\omega)$ есть $2m$ линейно независимых векторов $e_1, \ldots, e_{2m}$. Дополним эту систему до базиса $e_1, \ldots, e_n$ пространства A^n и разложим ω по этому базису. Пусть $\omega = e_1 \wedge u + v$, где в разложении поливекторов u, v нет e_1. Так как поливектор $\omega \wedge e_1 = v \wedge e_1$ разложим, то и v разложим, т.е. $v = \widehat{y}$.

По крайней мере $m-1$ векторов из $e_2,\dots,e_{2m}$ линейно независимы по модулю $\{e_1,y_1,\dots,y_m\}$. Пусть таковы $e_2,\dots,e_m$. Заменим базис пространства A^n, оставив неизменными первые m базисных векторов $e_1,\dots,e_m$, положив $e_{m+1}=y_1,\dots,e_{2m}=y_m$ и выбрав остальные базисные векторы произвольным образом. Пусть в новом базисе $u=e_j\wedge u'+u''$, где $2\leqslant j\leqslant m$, и в разложение поливекторов u', u'' не входит e_j.

Так как поливектор $\omega\wedge e_j=e_1\wedge u''\wedge e_j+\widehat{y}\wedge e_j$ разложим, то и поливектор $q=e_1\wedge u''+\widehat{y}$ разложим, т.е. для его координат выполняются соотношения Плюккера вида (3), в том числе для всякого $2\leqslant k\leqslant m$ выполняются все соотношения

$$a_{i_1,\dots,i_{m-1},k}\cdot a_{m+1,\dots,2m}+\sum_{s=1}^{m}a_{i_1,\dots,i_{m-1},m+s}\cdot a_{k,m+1,\dots,\widehat{m+s},\dots,2m}=0,$$

где $a_{i_1,\dots,i_m}$ – коэффициент в разложении q при $e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_m}$, $i_1<\dots<i_m$. Здесь во втором слагаемом все вторые сомножители нулевые (так как это коэффициенты при мономах, не зависящих от e_1 и не пропорциональных $\widehat{y}$). Кроме того, коэффициент при мономе $\widehat{y}$ единичен, $a_{m+1,\dots,2m}=1$. Следовательно, соотношение вырождается в равенство

$$a_{i_1,\dots,i_{m-1},k}=0$$

для любого набора $i_1,\dots,i_{m-1}$.

Таким образом, для всякого $2\leqslant j\leqslant m$ мы получаем $u''=0$, т.е. $(m-1)$-вектор u делится на каждый из $m-1$ векторов $e_2,\dots,e_m$. Значит, $e_1\wedge u=\alpha e_1\wedge\dots\wedge e_m$, $\alpha\in A$, и поливектор $\omega=e_1\wedge u+\widehat{y}$ 2-разложим.

(б)$\Rightarrow$(в). Пусть ω – m-вектор и $\operatorname{rank}_{\mathrm{Fr}}\omega=2$. Тогда из (б) следует, что $\dim B_0^{\mathrm{Fr}}(\omega)+\dim B_1^{\mathrm{Fr}}(\omega)=2m$. Но $B_i(\omega)=B_i^{\mathrm{Fr}}(\omega)\cap A^n$, поэтому $b_i(\omega)=\operatorname{rank}B_i(\omega)=\dim B_i^{\mathrm{Fr}}(\omega)$, $i=1,2$, так что $b_1(\omega)+b_0(\omega)=2m$. По условию (б) этого достаточно для 2-разложимости ω. Следовательно, $\operatorname{rank}\omega=\operatorname{rank}_{\mathrm{Fr}}\omega=2$.

(в)$\Rightarrow$(а). Предположим, что в A существует ненулевой необратимый элемент a. Рассмотрим следующий 3-вектор $\omega\in\Lambda^3(A^6)$:

$$\begin{aligned}\omega&=e_1\wedge e_2\wedge e_3+e_1\wedge e_2\wedge e_6+ae_1\wedge e_5\wedge e_6-e_1\wedge e_3\wedge e_5\\&\quad+e_2\wedge e_3\wedge e_4-ae_2\wedge e_4\wedge e_6+ae_3\wedge e_4\wedge e_5+a^2e_4\wedge e_5\wedge e_6.\end{aligned}$$

Покажем, что $\operatorname{rank}_{\mathrm{Fr}}\omega=2$. Пусть $x_1=a^{-1}e_1+e_4$, $x_2=e_2+ae_5$, $x_3=e_3+ae_6$, $x_4=(1-a^{-1})e_1$, $x_5=e_2$, $x_6=e_3$. Тогда $x_1\wedge x_2\wedge x_3+x_4\wedge x_5\wedge x_6=\omega$, где $x_i\in\mathrm{Fr}^6$, значит, $\operatorname{rank}_{\mathrm{Fr}}\omega\leqslant 2$. Так как

$$x_1\wedge x_2\wedge x_3\wedge x_4\wedge x_5\wedge x_6=-a^2(1-a^{-1})e_1\wedge e_2\wedge e_3\wedge e_4\wedge e_5\wedge e_6\neq 0,$$

то $B_0(\omega)=0$. Следовательно, $\operatorname{rank}_{\mathrm{Fr}}\omega=2$. Отсюда по условию $\operatorname{rank}\omega=2$, т.е. $\omega=y_1\wedge y_2\wedge y_3+y_4\wedge y_5\wedge y_6$, где $y_i\in A^6$. Поскольку ω не является произведением 2-вектора на разложимый поливектор, можно воспользоваться теоремой единственности 3.1, согласно которой $x_1\wedge x_2\wedge x_3=y_1\wedge y_2\wedge y_3$ (может быть, после перенумеровки $y_1,\dots,y_6$). Отсюда следует, что $a^{-1}e_1\wedge e_2\wedge e_3\in\Lambda^3(A^6)$, что означает обратимость элемента $a\in A$.

(г)$\Rightarrow$(в). Очевидно.

(а)$\Rightarrow$(г). Очевидно, так как если A – поле, то $A=\mathrm{Fr}(A)$.

Следствие 4.1. *Пусть A – поле, $\omega \in \Lambda^m(A^n)$ – ненулевой m-вектор, причем $b_0(\omega) < m-2$. Для того чтобы* $\operatorname{rank}\omega$ *был равен* 2, *необходимо и достаточно, чтобы $B_1(\omega) = M_1 \cup M_2, B_0(\omega) = M_1 \cap M_2$, где M_1, M_2 – m-мерные подпространства в A^n. Если эти условия выполнены, то $\omega = \widehat{x}_1 + \widehat{x}_2$, где $\widehat{x}_i \in \Lambda^m(M_i)$, $i=1,2$.*

Доказательство. Если $\omega = \widehat{x}_1 + \widehat{x}_2$, где $\widehat{x}_1, \widehat{x}_2$ – разложимые m-векторы, то ввиду предложения 2.1 $B_1(\omega) = X_1 \cup X_2$, а в силу леммы 2.1 $B_0(\omega) = X_1 \cap X_2$. Обратно, если $B_1(\omega) = M_1 \cup M_2, B_0(\omega) = M_1 \cap M_2$, где M_1, M_2 – m-мерные подпространства в A^n, то

$$\dim E_1(\omega) = \dim(M_1 + M_2) = 2m - \dim(M_1 \cap M_2) = 2m - \dim B_0(\omega).$$

Достаточность теперь вытекает из теоремы 4.1.

Пусть $\omega = \widehat{x}_1 + \widehat{x}_2$. Рассмотрим m-вектор $\omega' = \widehat{x}'_1 + \widehat{x}'_2$, где $\widehat{x}_i \in \Lambda^m(M_i)$. Так как $B_1(\omega') = X'_1 \cup X'_2$ (предложение 2.1), $B_0(\omega') = X'_1 \cap X'_2$ (лемма 2.1), где $X'_i = B_0(\widehat{x}'_i) = M_i$, $i=1,2$, то $B_0(\omega') = B_0(\omega)$, $B_1(\omega') = B_1(\omega)$, откуда в силу предложения 3.1 $\widehat{x}_i \parallel \widehat{x}'_i$. Таким образом, $\widehat{x}'_i \in \Lambda^m(M_i)$, $i=1,2$.

Как видно из доказанной теоремы, если $A \neq \operatorname{Fr}(A)$, то необходимое условие $\operatorname{rank}_{\operatorname{Fr}}\omega = 2$ не является, вообще говоря, достаточным для 2-разложимости ω. Однако для 2-векторов над нётеровыми плюккеровыми кольцами это так [10]. Аналогичный результат имеет место и для m-векторов, являющихся произведением 2-вектора на разложимый.

Предложение 4.1. *Пусть A – кольцо главных идеалов, ω – m-вектор, для которого $b_0(\omega) = m-2$. Тогда* $\operatorname{rank}\omega = 2$ *в том и только том случае, когда* $\operatorname{rank}_{\operatorname{Fr}}\omega = 2$.

Лемма 4.1. *Пусть A – плюккерово кольцо, $\omega \in \Lambda^m(A^n)$, $x \in A^{n+p}$, $p > 0$, $x \notin A^n$. Тогда* $\operatorname{rank}(\omega \wedge x) = \operatorname{rank}\omega$.

Доказательство. Очевидно, $\operatorname{rank}(\omega \wedge x) \leqslant \operatorname{rank}\omega$. Пусть

$$\omega \wedge x = x_1^1 \wedge \cdots \wedge x_k^1 + \cdots + x_1^l \wedge \cdots \wedge x_k^l$$

– минимальное разложение $(m+1)$-вектора $\omega \wedge x \in \Lambda^m(A^n \oplus Ax)$. Пусть $x_j^i = y_j^i + a_j^i x$, где $y_j^i \in A^n$, $a_j^i \in A$, $i = 1,\dots,l$, $j = 1,\dots,m+1$. Тогда

$$\widehat{x}_i = x_1^i \wedge \cdots \wedge x_{m+1}^i = y_1^i \wedge \cdots \wedge y_{m+1}^i + x \wedge \mu_i,$$

где μ_i – m-вектор из $\Lambda^m(Ay_1^i \oplus \cdots \oplus Ay_{m+1}^i)$, $i = 1,\dots,l$. Все m-векторы над свободным модулем ранга $(m+1)$ в OP-кольце разложимы [8], поэтому $\mu_i = \widehat{\mu}_i$, $i = 1,\dots,l$. Теперь $\omega \wedge x = y_1^1 \wedge \cdots \wedge y_{m+1}^1 + \cdots + y_1^l \wedge \cdots \wedge y_{m+1}^l + x \wedge \sum_{i=1}^l \widehat{\mu}_i$. Отсюда $(\omega \pm \sum_{i=1}^l \widehat{\mu}_i) \wedge x = \widehat{y}_1 + \cdots + \widehat{y}_l \in \Lambda^m(A^n)$, что возможно лишь в случае $\omega = \pm \sum_{i=1}^l \widehat{\mu}_i$. Значит, $\operatorname{rank}(\omega \wedge x) \geqslant \operatorname{rank}\omega$.

Доказательство предложения 4.1. Так как $B_0(\omega)$ – замкнутый подмодуль в A^n, то существует базис $e_1, \dots, e_n$ модуля A^n, первые $m-2$ вектора которого являются базисом для $B_0(\omega)$. Пусть

$$\omega = \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_m \leqslant n} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_m}$$

и

$$\omega' = \sum_{m-1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n} a_{1,\dots,m-2,i_1,i_2} e_{i_1} \wedge e_{i_2}.$$

Нетрудно проверить, что

$$\omega = e_1 \wedge \dots \wedge e_{m-2} \wedge \omega'.$$

Так как $\omega' \in \Lambda^m(Ae_{m-1} \oplus \dots \oplus Ae_n)$, то ввиду леммы 4.1

$$\operatorname{rank} \omega = \operatorname{rank}(e_1 \wedge \dots \wedge e_{m-2} \wedge \omega') = \operatorname{rank} \omega'.$$

Воспользовавшись теоремой 2 из [10] о ранге 2-векторов над нётеровым плюккеровым кольцом, получаем требуемый результат.

Множество всех поливекторов над данным кольцом можно разбить на следующие четыре класса:

1) 2-векторы;
2) m-векторы с $m > 2$ и $b_0 = m-2$;
3) m-векторы с $m > 2$ и $b_0 > m-2$;
4) m-векторы с $m > 2$ и $b_0 < m-2$.

Как видно из теоремы 2 из [10] и предложения 4.1, в случае плюккеровых колец вопрос о 2-разложимости поливекторов первых трех классов сводится в принципе к вопросу об их 2-разложимости над полем частных. Иначе обстоит дело с m-векторами ($m > 2$), у которых $b_0 < m-2$. Исследованию условий 2-разложимости таких m-векторов посвящен § 5.

§ 5. Поливекторы ранга 2 над кольцом Крулля. Общий случай

Основными результатами этого параграфа являются предложение 5.1, содержащее достаточные условия 2-разложимости m-вектора ω с $b_0 < m-2$, и теорема 5.2, в которой установлены необходимые и достаточные условия 2-разложимости для так называемых 2-примитивных m-векторов.

Лемма 5.1. *Пусть A – кольцо Крулля, M_1, M_2 – замкнутые подмодули свободного модуля A^n ранга m, причем ни один из них не лежит в другом. Если $M_1 + M_2$ замкнут в A^n, то* $\widetilde{\Lambda^m(M_1) + \Lambda^m(M_2)} = \widetilde{\Lambda^m(M_1)} + \widetilde{\Lambda^m(M_2)}$.

Доказательство. Очевидно, $\widetilde{\Lambda^m(M_i)} \subset \widetilde{\Lambda^m(M_1)+\Lambda^m(M_2)}$. Покажем, что $\widetilde{\Lambda^m(M_1)+\Lambda^m(M_2)} \subset \widetilde{\Lambda^m(M_1)}+\widetilde{\Lambda^m(M_2)}$. Пусть $\omega \in \widetilde{\Lambda^m(M_1)+\Lambda^m(M_2)}$, т.е. $a\omega = \widehat{x}_1+\widehat{x}_2$, где $\widehat{x}_i \in \Lambda^m(M_i)$, $i=1,2$. Покажем, что $\widehat{x}_i/a \in \Lambda^m(A^n)$. Для этого достаточно доказать, что $\operatorname{div}\widehat{x}_i$ делится на a, причем можно ограничиться доказательством в локализации по простому идеалу p высоты 1. Будем считать, что вместо A рассматривается A_p и все модули локализованы по p. Так как M_1 и M_2 замкнуты, $M_1\cap M_2$ тоже замкнут [8] и, следовательно, выделяется в M_2 прямым слагаемым. Пусть $M_2 = N \oplus (M_1\cap M_2)$. Тогда $M_1+M_2 = M_1\oplus N$. Пусть $e_1,\dots,e_m$ – базис в M_1 и $f_1,\dots,f_t$ – базис в N. Тогда $\operatorname{div}(e_1\wedge\dots\wedge e_m\wedge f_1\wedge\dots\wedge f_t)=1$. Очевидно, $\widehat{x}_1 = a_1\widehat{e}$ $(a_1\in A)$, а $f_1\wedge\dots\wedge f_t\wedge\widehat{x}_2 = 0$, так как $f_i\in N\subset M_2$ и $f_1\wedge\dots\wedge f_t\wedge\widehat{x}_2\in\Lambda^{m+t}(M_2)=0$. Следовательно, $a\omega\wedge\widehat{f} = \widehat{x}_1\wedge\widehat{f} = a_1\widehat{e}\wedge\widehat{f}$. Переходя к дивизорам, получаем, что $a\operatorname{div}(\omega\wedge\widehat{f}) = a_1\operatorname{div}(\widehat{e}\wedge\widehat{f}) = 1$. Следовательно, локально $\operatorname{div}\widehat{x}_1 = a_1$ делится на a. Лемма доказана.

Пусть M – замкнутый подмодуль ранга m в свободном модуле A^n. Назовем модуль M *плюккеровым*, если всякий m-вектор ω, для которого $B_0(\omega)=M$, разложим. Кольцо A тогда и только тогда плюккерово, когда все замкнутые модули над ним плюккеровы.

Предложение 5.1. *Пусть A – кольцо Крулля, $\omega\in\Lambda^m(A^n)$, причем $b_0\neq m-2$. Предположим, что выполнены условия*:

(а) $B_1(\omega)=M_1\cup M_2$, $B_0(\omega)=M_1\cap M_2$, *где $M_1\neq M_2$ – плюккеровы модули ранга m*;

(б) $E_1(\omega)$ *– замкнутый модуль.*

Тогда $\operatorname{rank}\omega=2$.

Доказательство. Рассмотрим ω как элемент $\Lambda^m(\mathrm{Fr}^n)$. Как уже отмечалось, $b_1(\omega)=\dim B_1^{\mathrm{Fr}}(\omega)$. Если $b_0(\omega)=m$, то $B_0(\omega)\subset M_1$ – замкнутые модули ранга m, поэтому $B_0(\omega)=M_1\cap M_2=M_1=M_2$, что противоречит условию. Следовательно, $b_0(\omega)<m-2$. Ввиду следствия 4.1 $\omega=\widehat{x}_1+\widehat{x}_2$, где $\widehat{x}_i\in\Lambda^m(\mathrm{Fr}\,M_i)$. Отсюда $\omega\in\widetilde{\Lambda^m(M_1)+\Lambda^m(M_2)}$. Так как ранги замкнутых модулей M_1 и M_2 равны, то ни один из них не лежит в другом. Кроме того, очевидно, $E_1(\omega)=\widetilde{M_1+M_2}$, значит, можно применить лемму 5.1. Таким образом, $\omega\in\widetilde{\Lambda^m(M_1)}+\widetilde{\Lambda^m(M_2)}$, т.е. $\omega=\widehat{y}_1/a+\widehat{y}_2/a$, где $\widehat{y}_i\in\Lambda^m(M_i)$, $\widehat{y}_i/a\in\Lambda^m(A^n)$, $i=1,2$. Так как M_i – плюккеровы A-модули, то $\widehat{y}_i/a=\widehat{z}_i\in\Lambda^m(M_i)$, $i=1,2$. Следовательно, $\operatorname{rank}\omega=2$.

Замечание. Условие (а) является также и необходимым (см. следствие 4.1). Условие (б) в общем случае необходимо тогда и только тогда, когда A – поле.

Теорема 5.1. *Пусть A – кольцо Крулля, $\omega\in\Lambda^m(A^n)$, причем $b_0\neq m-2$. Если $B_1(\omega)=F_1\cup F_2$, $B_0(\omega)=F_1\cap F_2$, где $F_1\neq F_2$ – свободные модули ранга m, а $E_1(\omega)$ – замкнутый модуль, то* $\operatorname{rank}\omega=2$.

Доказательство. Для того чтобы применить предложение 5.1, достаточно доказать, что модули F_1, F_2 плюккеровы. Очевидно, $B_1(\omega)$ – замкнутое подмножество в A^n, так как если $x\wedge\omega$ – плюккеров m-вектор и $x=ay$, где $y\in A^n$, то плюккеровым будет и $(m+1)$-вектор $y\wedge\omega\in\Lambda^{m+1}(A^n)$. Согласно [8; следствие из предложения 1.1] наибольший общий дивизор всех элементов $\Lambda^m(F_i)$ равен 1. Так как $\Lambda^m(F_i) = Af_1^i \wedge \cdots \wedge f_m^i$, где $f_1^i, \ldots, f_m^i$ – образующие модуля F_i, то $\operatorname{div}(f_1^i \wedge \cdots \wedge f_m^i) = 1$, $i = \overline{1,2}$. Отсюда можно вывести, что $\Lambda^m(F_i)$ – замкнутый модуль. Следовательно, $\widetilde{\Lambda^m(F_i)} = \Lambda^m(F_i)$. Таким образом, F_1, F_2 – плюккеровы модули. Теперь утверждение теоремы вытекает из предложения 5.1.

Следствие 5.1. *Пусть A – плюккерово кольцо Крулля, $\omega \in \Lambda^m(A^n)$, причем $b_0(\omega) < m-2$ и $\operatorname{rank}_{\mathrm{Fr}} \omega = 2$. Если модуль $E_1(\omega)$ замкнут, то $\operatorname{rank} \omega = 2$.*

Перейдем теперь к формулировке и доказательству критерия 2-разложимости для примитивных m-векторов над кольцом Крулля. Соответствующая теорема для 1-разложимых m-векторов доказана в [9].

Обращение к классу примитивных поливекторов при исследовании вопросов разложимости объясняется следующими причинами. Как известно, если A – поле, то условия разложимости $\omega \in \Lambda^m(A^n)$ выражаются в виде ограничений на размерность пространства $B_0(\omega)$. В случае произвольного коммутативного кольца условие разложимости m-вектора ω, сформулированные в терминах свойств замкнутого модуля $B_0(\omega)$, обеспечивают разложимость всех m-векторов $\omega' \in \Lambda^m(A^n)$, параллельных m-вектору ω. Если модуль $B_0(\omega)$ свободен или кольцо A факториально, то множество таких ω' имеет вид $A\omega_0$, где ω_0 – поливектор с единичным дивизором, у которого $B_0(\omega_0) = B_0(\omega)$. Так как из разложимости ω_0 следует разложимость всех $\omega \in \Lambda^m(A^n)$, для которых $B_0(\omega) = B_0(\omega_0)$, то вопрос о разложении ω сводится, таким образом, к вопросу о разложимости примитивного поливектора ω_0.

В случае 2-разложимости можно ввести понятие примитивности таким образом, чтобы описанная ситуация в основном сохранилась. Условие примитивности (или, как мы будем в дальнейшем его называть, 1-примитивности) эквивалентно в кольце Крулля тому, что для любого простого дивизора p $\overline{\omega} \neq 0$ (через $\overline{\omega}$ обозначен образ ω в факторкольце A/p). Иными словами, ω 1-примитивен тогда и только тогда, когда не существует такого простого дивизора p, что $\operatorname{rank}_{\mathrm{Fr}} \overline{\omega} = \operatorname{rank} \overline{\omega} = 0$.

Так как $\operatorname{rank} \omega = 1$ в том и только том случае, когда для координат ω выполнены соотношения Плюккера (3) $\Pi_\omega(i_1, \ldots, i_{m-1} \mid j_0, \ldots, j_m) = 0$, то для 2-примитивности ω необходимо и достаточно, чтобы дивизор идеала, порожденного левыми частями соотношений Плюккера, был равен 1. Это дает основание обозначить $\operatorname{div}_{1 \leqslant i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_{m-1} \leqslant j_0 \leqslant \cdots \leqslant j_m \leqslant n} \{\Pi_\omega(i_1, \ldots, i_{m-1} \mid j_0, \ldots, j_m)\}$ через $\operatorname{div}_2 \omega$; m-вектор ω 2-примитивен тогда и только тогда, когда $\operatorname{div}_2 \omega = 1$. Очевидно, $\operatorname{div} \omega = \operatorname{div}_1 \omega$ делит $\operatorname{div}_2 \omega$, поэтому 2-примитивный m-вектор является 1-примитивным.

Пусть, далее, p – некоторый простой дивизор. Рассмотрим факторкольцо $\overline{A} = A/p$, отображения $\varphi_p \colon A \to \overline{A}$ и $\varphi_p^n \colon A^n \to \overline{A}^n$. Пусть M – подмножество в A^n, $\overline{M}$ – его образ при отображении φ_p^n и $r(\overline{M})$ – ранг множества $\overline{M}$ относительно кольца $\overline{A}$, т.е. наибольшее число линейно независимых над $\overline{A}$ векторов из $\overline{M}$. Обозначим через $r_0(M)$ наименьшее из чисел $r(\varphi_p^n M)$ для различных простых дивизоров p.

В [8] были введены инварианты $d_i(M)$ подмодуля M свободного модуля – аналог элементарных делителей. По определению $d_i(M) = \operatorname{div} \Lambda^i(M)$, $i = 1, \ldots, m =$

$\operatorname{rank} M$. Покажем, что $r_0(M) = \max\{s \in \mathbb{Z} : d_s(M) = 1\}$. В самом деле, если $d_s(M) = 1$, то каков бы ни был простой дивизор p, существует разложимый элемент $x_1 \wedge \dots \wedge x_s \in \Lambda^s(M)$, координаты которого не все кратны p. Следовательно, для любого дивизора p существуют линейно независимые элементы $\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_s \in \overline{M}$. Отсюда $r(\overline{M}) \geqslant s$ и $r_0(M) \geqslant \max\{s \in \mathbb{Z} : d_s(M) = 1\}$. Если $d_s(M) \neq 1$, то существует простой дивизор p, делящий все элементы $\Lambda^s(M)$. Следовательно, $r_0(M) = \max\{s \in \mathbb{Z} : d_s(M) = 1\}$.

Заметим, что если M – замкнутый модуль, то $d_m(M) = 1$, так что $r_0(M) = \operatorname{rank} M$. В случае, когда M рефлексивен, согласно [8; следствие 1] верно и обратное: если $r_0(M) = \operatorname{rank} M$, то M – замкнутый модуль. Таким образом, разность $\operatorname{rank} M - r_0(M)$ определяет меру замкнутости модуля M.

Теорема 5.2. *Пусть A – кольцо Крулля, ω – 2-примитивный m-вектор над A^n с $b_0(\omega) < m - 2$. Следующие условия эквивалентны*:

(а) $\operatorname{rank} \omega = 2$;

(б) *ранг любого m-вектора $\omega' \in \Lambda^m(A^n)$ с $B_i(\omega') = B_i(\omega)$, $i = 1, 2$, равен* 2;

(в) *$B_1(\omega) = F_1 \cup F_2$, $B_0(\omega) = F_1 \cap F_2$, где $F_1 \neq F_2$ – свободные подмодули ранга m в A^n, для которых $\Lambda^m(F_1) + \Lambda^m(F_2)$ – замкнутый подмодуль $\Lambda^m(A^n)$*;

(г) *$B_1(\omega) = F_1 \cup F_2$, $B_0(\omega) = F_1 \cap F_2$, где $F_1 \neq F_2$ – свободные подмодули ранга m в A^n, и $r_0(E_1(\omega)) \neq m$.*

Доказательство. (а)$\Rightarrow$(в). Пусть $\omega = \widehat{x}_1 + \widehat{x}_2$, где $\widehat{x}_i$ – разложимые m-векторы из $\Lambda^m(A^n)$, $i = 1, 2$. Покажем, что $\operatorname{div} \widehat{x}_i = 1$, $i = 1, 2$. В самом деле, предположим, что некоторый простой дивизор p делит $\operatorname{div} \widehat{x}_1$. Тогда $\omega \equiv \widehat{x}_2$ по модулю p, т.е. $\overline{\omega}$ – плюккеров m-вектор над $\overline{A}^n$. Следовательно, его координаты удовлетворяют соотношениям Плюккера по модулю p, а дивизор идеала, порожденного левыми частями соотношений Плюккера, $\operatorname{div} \Pi_\omega = \operatorname{div}_2 \omega$ кратен p. Это, однако, противоречит 2-примитивности ω, так что $\operatorname{div} \widehat{x}_2 = 1$. Таким образом, 2-примитивный m-вектор ранга 2 является суммой двух 1-примитивных m-векторов $\widehat{x}_1, \widehat{x}_2$. В силу [9; теорема 1] отсюда следует, что $\widetilde{X}_i = X_i$, $i = 1, 2$. Ввиду следствия 2.1 и леммы 2.1 $B_1(\omega) = X_1 \cup X_2$, $B_0(\omega) = X_1 \cap X_2$, где $X_1 \neq X_2$ – свободные модули ранга m.

Докажем, далее, что $\Lambda^m(X_1) + \Lambda^m(X_2)$ – замкнутый модуль. Пусть $a\mu = a_1\widehat{x}_1 + a_2\widehat{x}_2$, где $\mu \in \Lambda^m(A^n)$, $a, a_1, a_2 \in A$. Если a_2 не делится на a, то, умножив a, a_1, a_2 на некоторый элемент поля частных, можно считать, что существует простой дивизор p, делящий a и не делящий a_2. По модулю этого дивизора $a_1\widehat{x}_1 \equiv -a_2\widehat{x}_2$. Отсюда $a_2\omega \equiv (1 - a_1)\widehat{x}_1$, причем $a_2 \not\equiv 0$, что означает плюккеровость m-вектора $\overline{\omega} \in \Lambda^m(\overline{A}^n)$. Следовательно, координаты $\overline{\omega}$ удовлетворяют соотношениям Плюккера, так что $\operatorname{div} \Pi(\omega)$ кратен p. Это, однако, противоречит 2-примитивности ω, поэтому a_2 делится на a. По тем же причинам a_1 делится на a, значит, $\mu \in \Lambda^m(X_1) + \Lambda^m(X_2)$.

(в)$\Rightarrow$(б). Пусть $\omega' \in \Lambda^m(A^n)$ и $B_1(\omega') = F_1 \cup F_2$, $B_0(\omega') = F_1 \cap F_2$, где F_1, F_2 – свободные модули ранга m. Поскольку $B_1(\omega')$ – замкнутое множество, F_1 и F_2 замкнуты. Так как $\dim B_i^{\mathrm{Fr}}(\omega') = \operatorname{rank} B_i(\omega')$, то по следствию 4.1 $\omega' = \widehat{y}_1 + \widehat{y}_2$, где $\widehat{y}_i \in \Lambda^m(\mathrm{Fr}\, F_i)$, $i = 1, 2$. Это означает, что $\omega' \in \Lambda^m(\widetilde{F_1) + \Lambda^m}(F_2)$. Поскольку $\Lambda^m(F_1) + \Lambda^m(F_2)$ замкнут, $\omega' \in \Lambda^m(F_1) + \Lambda^m(F_2)$ и, следовательно, имеет ранг 2.

(б)$\Rightarrow$(а). Очевидно.

(в)$\Leftrightarrow$(г). Так как $E_1(\omega) = F_1 + F_2$, то для доказательства эквивалентности утверждений (в) и (г) достаточно проверить справедливость следующей леммы.

Лемма 5.2. *Пусть A – кольцо Крулля, F_1, F_2 – свободные замкнутые подмодули ранга m в A^n. Подмодуль $\Lambda^m(F_1) + \Lambda^m(F_2)$ тогда и только тогда замкнут в A^n, когда $r_0(F_1 + F_2) \neq m$.*

Доказательство. Пусть $\Lambda^m(F_1) + \Lambda^m(F_2)$ замкнут. Если $r_0(F_1 + F_2) = m$, то для некоторого простого дивизора p $\mathrm{rank}\, \varphi_p^n(F_1 + F_2) = \mathrm{rank}\, \overline{(F_1 + F_2)} = m$. Пусть $x_1^i, \dots, x_m^i$ – образующие модуля F_i, $i = 1, 2$, $\widehat{x}_i = x_1^i \wedge \dots \wedge x_m^i$. Очевидно, $\widehat{\overline{x}}_i = \overline{x}_1^i \wedge \dots \wedge \overline{x}_m^i \in \Lambda^m(\overline{F}_i) \subset \Lambda^m(\overline{F_1 + F_2})$, $\widehat{\overline{x}}_i \neq 0$, так как ввиду замкнутости модуля F_i $\mathrm{div}\, \widehat{\overline{x}}_i = 1$. Так как $\mathrm{rank}\, \Lambda^m(\overline{F_1 + F_2})$ равен 1, то $\overline{a}_1 \widehat{\overline{x}}_1 = \overline{a}_2 \widehat{\overline{x}}_2$ для некоторых ненулевых $\overline{a}_1, \overline{a}_2 \in \overline{A} = A/p$. Возвращаясь в основное кольцо, получаем, что $a_1 \widehat{x}_1 = a_2 \widehat{x}_2 + \mu$, где μ – m-вектор, все координаты которого делятся на p. В локализации по любому простому идеалу дивизор p является главным, следовательно (поскольку $\Lambda^m(F_1) + \Lambda^m(F_2)$ замкнут также и локально), a_1, a_2 делятся на p. Делимость же, очевидно, сохраняется и в основном кольце, что противоречит требованию $\overline{a}_1, \overline{a}_2$.

Обратно, пусть $r_0(F_1 + F_2) \neq m$. Предположим, что $\Lambda^m(F_1) + \Lambda^m(F_2)$ не замкнут. Тогда $a\mu = a_1 \widehat{x}_1 + a_2 \widehat{x}_2$ для некоторого m-вектора μ и элементов $a, a_1, a_2 \in A$ таких, что некоторый простой дивизор p, делящий a, не делит a_1 и a_2. Так как $\widehat{\overline{x}}_i \neq 0$, ранг $\overline{(F_1 + F_2)}$ не может быть меньше m. Умножив равенство $a\mu = a_1 \widehat{x}_1 + a_2 \widehat{x}_2$ на x_j^2, получим, что $a_1 \widehat{x}_1 \wedge x_j^2 \equiv 0 \pmod{p}$, $j = 1, \dots, m$, поэтому ранг модуля $\overline{(F_1 + F_2)}$, порожденного векторами $\overline{x}_1^1, \dots, \overline{x}_m^1, \overline{x}_1^2, \dots, \overline{x}_m^2$, из которых лишь m линейно независимы, равен m. Это противоречит предположению и доказывает замкнутость $\Lambda^m(F_1) + \Lambda^m(F_2)$. Доказательство теоремы закончено.

Теорема 5.1 дает легко проверяемые достаточные условия 2-разложимости поливекторов над кольцом Крулля. Последняя часть параграфа посвящена выделению класса поливекторов ранга 2, для которых эти условия необходимы.

Пусть A – произвольное коммутативное кольцо. С каждым ненулевым m-вектором $\omega \in \Lambda^m(A^n)$ можно связать точную последовательность

$$0 \longrightarrow B_0(\omega) \to A^n \xrightarrow{\psi_\omega} A^n \wedge \omega \longrightarrow 0,$$

где $\psi_\omega(x) = x \wedge \omega$ для любого элемента $x \in A^n$. Очевидно, ψ_ω – линейное отображение, так что последовательность является точной последовательностью A-модулей и A-гомоморфизмов.

Фиксируем базис $e_1, \dots, e_n$ модуля A^n. Пусть

$$\omega = \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_m \leqslant n} a_{i_1 \dots i_m} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_m},$$

где $a_{i_1\dots i_m} \in A$. Так как $\psi_\omega\colon A^n \longrightarrow A^n \wedge \omega$ – линейное отображение, ему однозначно соответствует $(n\times C_n^{m+1})$-матрица Q_ω. Именно, поскольку $(m+1)$-векторы вида $e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_{m+1}}$ $(1 \leqslant j_1 < \dots < j_{m+1} \leqslant n)$ образуют базис в пространстве $\Lambda^{m+1}(A^n) \supset A^n \wedge \omega$, то $\psi_\omega(e_i)$ однозначно записывается в виде

$$\psi_\omega(e_i) = \sum a_{ij_1\dots j_{m+1}} e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_{m+1}},$$

где $a_{ij_1\dots j_{m+1}}$ – элементы кольца A. Таким образом, $Q_\omega = (a_{ij_1\dots j_{m+1}})$. Элементы $a_{ij_1\dots j_{m+1}}$ матрицы Q_ω следующим образом выражаются через координаты $a_{i_1\dots i_m}$ m-вектора ω:

$$a_{ij_1\dots j_{m+1}} = \begin{cases} (-1)^\nu a_{j_1\dots\widehat{i}\dots j_{m+1}}, & \text{если } i \in \{j_1,\dots,j_{m+1}\}, \\ 0, & \text{если } i \notin \{j_1,\dots,j_{m+1}\}, \end{cases}$$

где ν – четность перестановки $ij_1\dots\widehat{i}\dots j_{m+1}$.

Обозначим i-ю строку матрицы Q_ω через Q_ω^i. Так как

$$\psi_\omega(x_1e_1 + \dots + x_ne_n) = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{1\leqslant j_1<\dots<j_{m+1}\leqslant n} a_{ij_1\dots j_{m+1}} e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_{m+1}},$$

$A^n \wedge \omega$ изоморфен A-модулю, порожденному строками матрицы Q_ω, а $B_0(\omega)$ изоморфен модулю, состоящему из таких векторов $x \in A^n$, что $xQ_\omega = x_1Q_\omega^1 + \dots + x_nQ_\omega^n = 0$. Так как $B_0(\omega) = \ker Q_\omega$, то, очевидно, $\operatorname{rank} B_0(\omega) + \operatorname{rank} Q_\omega = n$.

Назовем m-вектор $\omega \in \Lambda^m(A^n)$ *∞-примитивным*, если для любого элемента $a \in A$ $\varphi_a^n(B_0(\omega)) = B_0(\Lambda^m\varphi_a^n(\omega))$.

Предложение 5.2. *Пусть A – кольцо Крулля, $\omega \in \Lambda^m(A^n)$ – m-вектор. Следующие условия эквивалентны*:

(а) *ω – ∞-примитивный m-вектор*;
(б) *$A^n \wedge \omega$ – замкнутый подмодуль в $\Lambda^{m+1}(A^n)$*;
(в) *модуль $A^n \wedge \omega$ рефлексивен и $d_r(Q_\omega) = 1$, где $r = \operatorname{rank} Q_\omega$*.

Доказательство. (а)$\Rightarrow$(б). Пусть $\mu \in \widetilde{A^n \wedge \omega}$, т.е. μ – $(m+1)$-вектор, для которого существуют такие элементы $a_0,\dots,a_n \in A$, что $a_0\mu = a_1Q_\omega^1 + \dots + a_nQ_\omega^n$.

Заметим, что $Q_{\Lambda^m\varphi_{a_0}^n(\omega)} = (\varphi_{a_0}^n(a_{ij_1\dots j_{m+1}}))$, поэтому в факторкольце по модулю a_0 $\overline{a}_1Q_{\overline{\omega}}^1 + \dots + \overline{a}_nQ_{\overline{\omega}}^n = \overline{a}_1\overline{Q}_\omega^1 + \dots + \overline{a}_n\overline{Q}_\omega^n$. Следовательно, если через a обозначить вектор $a = (a_1,\dots,a_n)$, то $\overline{a}\overline{Q}_\omega = \overline{a}Q_{\overline{\omega}} = \overline{0}$, откуда $\overline{a} \in B_0(\overline{\omega})$. По условию $B_0(\overline{\omega}) = \overline{B_0(\omega)}$, значит, $\overline{a} = \overline{x}$, где $x \in B_0(\omega)$. Таким образом, $a = x + a_0b$, где $b \in A^n$. Теперь $a_0b_1Q_\omega^1 + \dots + a_0b_nQ_\omega^n = (a_1 - x_1)Q_\omega^1 + \dots + (a_n - x_n)Q_\omega^n = a_1Q_\omega^1 + \dots + a_nQ_\omega^n = a_0\mu$, откуда $\mu = bQ_\omega \in A^n \wedge \omega$.

(б)$\Rightarrow$(а). Предположим, что $A^n \wedge \omega$ замкнут. Так как всегда $\overline{B_0(\omega)} \subset B_0(\overline{\omega})$, то достаточно доказать обратное включение. Пусть $x \in A^n, \overline{x} \in B_0(\overline{\omega})$, т.е. $\overline{x} \wedge \overline{\omega} = 0$. Тогда $x \in \ker\psi_\omega = \ker\overline{\psi}_\omega$, откуда $\overline{x}\overline{Q}_\omega = 0$. Следовательно, $xQ_\omega = a_0y$, где $y \in \Lambda^{m+1}(A^n)$, $a \in A$. Таким образом, $y \in \widetilde{A^n \wedge \omega} = A^n \wedge \omega$. Это означает, что $y = \psi_\omega(x')$ для некоторого элемента $x' \in A^n$. Отсюда $(a_0x' - x)Q_\omega = 0$, т.е. $a_0x' - x \in B_0(\omega)$. Переходя к факторкольцу по модулю a, получаем, что $\overline{x} \in \overline{B_0(\omega)}$.

(б)$\Leftrightarrow$(в). Всякий замкнутый модуль M ранга r над кольцом Крулля рефлексивен и $d_r(M) = 1$ [8]. Обратно, если M рефлексивен и $d_r(M) = 1$, то он замкнут в силу [8; следствие предложения 1.1].

Следствие 5.2. *Пусть A – кольцо Крулля, $\omega \in \Lambda^m(A^n)$, $B_0(\omega) = 0$. Тогда для ∞-примитивности ω необходимо и достаточно, чтобы $d_r(M) = 1$.*

Заметим, что условие 1-примитивности m-вектора ω выражается в терминах матрицы Q_ω в виде $d_1(M) = 1$. 2-примитивность означает, что для любого элемента $a \in A$ $\overline{\omega}$ не является плюккеровым, т.е. $\operatorname{rank} B_0(\overline{\omega}) < m$. Но $B_0(\overline{\omega}) = \ker \overline{Q}_\omega$, поэтому $\operatorname{rank} B_0(\overline{\omega}) < m$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{rank} \overline{Q}_\omega > n - m$. В свою очередь, это эквивалентно условию $d_{n-m+1}(Q_\omega) = 1$. Следовательно, ω 2-примитивен тогда и только тогда, когда $d_{n-m+1}(Q_\omega) = 1$. Теперь видно, что требование ∞-примитивности является самым сильным из всех перечисленных условий примитивности.

Теорема 5.3. *Пусть A – кольцо Крулля, $\omega \in \Lambda^m(A^n)$ – ∞-примитивный m-вектор, $b_0(\omega) < m - 2$. Для того чтобы $\operatorname{rank} \omega = 2$, необходимо и достаточно, чтобы $E_1(\omega)$ был замкнут в A^n, а $B_0(\omega)$ и $B_1(\omega)$ представлялись в виде $B_1(\omega) = F_1 \cup F_2$, $B_0(\omega) = F_1 \cap F_2$, где F_1, F_2 – свободные подмодули ранга m в A^n.*

Доказательство. Достаточность вытекает из теоремы 5.1. Докажем необходимость. Так как ∞-примитивный m-вектор является 2-примитивным, то в силу теоремы 5.2 для ∞-примитивного m-вектора ω ранга 2 существуют такие свободные подмодули $F_1, F_2 \subset A^n$, что $B_1(\omega) = F_1 \cup F_2$, $B_0(\omega) = F_1 \cap F_2$. Докажем, что $E_1(\omega) = F_1 + F_2$ замкнут. Так как $B_1(\omega)$ замкнут, то F_1, F_2 – замкнутые подмодули.

Лемма 5.3. *Пусть M_1 и M_2 – замкнутые подмодули в A^n. Следующие условия эквивалентны:*

(а) *$M_1 + M_2$ замкнут;*
(б) *для любого $a \in A$ $\varphi_a^n(M_1 \cap M_2) = \varphi_a^n(M_1) \cap \varphi_a^n(M_2)$;*

Доказательство. (а)$\Rightarrow$(б). Очевидно, $\varphi_a^n(M_1 \cap M_2) \subset \varphi_a^n(M_1) \cap \varphi_a^n(M_2)$. Покажем, что $\varphi_a^n(M_1) \cap \varphi_a^n(M_2) \subset \varphi_a^n(M_1 \cap M_2)$. Пусть $\xi = \varphi_a^n(x_1) = \varphi_a^n(x_2) \in \varphi_a^n(M_1) \cap \varphi_a^n(M_2)$, где $x_i \in M_i$, $i = 1, 2$. Тогда $x_1 - x_2 = ay$, где $y \in A^n$. Так как $y \in \widetilde{M_1 + M_2}$, то ввиду замкнутости $M_1 + M_2$ имеем $y \in M_1 + M_2$. Пусть $y = y_1 + y_2$, где $y_i \in M_i$, $i = 1, 2$. Тогда $x_1 - ay_1 = x_2 + ay_2 \in M_1 \cap M_2$, $\varphi_a^n(x_1 - ay_1) = \varphi_a^n(x_1) = \xi$. Таким образом, $\xi \in \varphi_a^n(M_1 \cap M_2)$.

(б)$\Rightarrow$(а). Пусть $x \in \widetilde{M_1 + M_2}$. Тогда $ax = x_1 + x_2$, где $a \in A$, $x_i \in M_i$, $i = 1, 2$. Следовательно, $\varphi_a^n(x_1) = -\varphi_a^n(x_2)$, откуда $\varphi_a^n(x_i) \in \varphi_a^n(M_1) \cap \varphi_a^n(M_2) = \varphi_a^n(M_1 \cap M_2)$. Пусть $\varphi_a^n(x_i) = \varphi_a^n(y_i)$, где $y_i \in M_1 \cap M_2$, $i = 1, 2$, тогда $x_i = y_i + az_i$, где $z_i \in A^n$, $i = 1, 2$. Отсюда вытекает, что $z_i \in \widetilde{M_i} = M_i$, $i = 1, 2$. Следовательно, $ax = y_1 + y_2 + az_1 + az_2$, откуда $a(x - z_1 - z_2) \in M_1 \cap M_2$. Так как $M_1 \cap M_2$ замкнут, то $x - z_1 - z_2 \in M_1 \cap M_2$. Значит, $x \in M_1 + M_2$. Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы 5.3. Ввиду только что доказанной леммы для замкнутости $E_1(\omega) = F_1 + F_2$ достаточно проверить, что $\varphi_a^n(F_1 \cap F_2) = \varphi_a^n(F_1) \cap \varphi_a^n(F_2)$. Но $F_1 \cap F_2 = B_0(\omega)$, поэтому в силу ∞-примитивности ω

$$\varphi_a^n(F_1 \cap F_2) = \overline{B_0(\omega)} = B_0(\overline{\omega}) = \varphi_a^n(F_1) \cap \varphi_a^n(F_2).$$

Теорема доказана.

Следующее предложение дает простой способ проверки ∞-примитивности m-вектора с четным m.

Предложение 5.3. *Пусть $m \neq 2$ – четное число, ω – m-вектор ранга 2 над кольцом Крулля A, причем $B_0(\omega) = 0$. Тогда ω ∞-примитивен в том и только том случае, когда* $\mathrm{div}(\frac{1}{2}\omega \wedge \omega) = 1$.

Доказательство. Пусть ω ∞-примитивен. Так как $\mathrm{rank}\,\omega = 2$, то $\omega = \widehat{x}_1 + \widehat{x}_2$, где $\widehat{x}_i \in \Lambda^m(A^n)$, $i = 1, 2$. В силу теоремы 5.3 $E_1(\omega) = X_1 \oplus X_2$ – замкнутый модуль. Согласно [8; следствие 1] $d_{2m}(E_1(\omega)) = 1$. Но $\omega \wedge \omega = 2\widehat{x}_1 \wedge \widehat{x}_2$, поэтому $\mathrm{div}(\frac{1}{2}\omega \wedge \omega) = d_{2m}(E_1(\omega)) = 1$.

Обратно, если $\mathrm{div}(\frac{1}{2}\omega \wedge \omega) = 1$, то в силу [8; следствие предложения 1.1] свободный модуль $E_1(\omega) = X_1 \oplus X_2$ замкнут. Ввиду леммы 5.3 это означает, что $\varphi_a^n(X_1) \cap \varphi_a^n(X_2) = 0$ для любого $a \in A$. Следовательно, $\varphi_a^n(B_0(\omega)) = 0$. Для m-векторов с $b_0(\omega) = 0$ это означает ∞-примитивность.

Следствие 5.3. *Пусть A – кольцо Крулля, $m \neq 2$ – четное число, $\omega \in \Lambda^m(A^n)$ – m-вектор с* $\mathrm{div}(\frac{1}{2}\omega \wedge \omega) = 1$. *Для того чтобы* $\mathrm{rank}\,\omega = 2$, *необходимо и достаточно, чтобы $B_1(\omega) = F_1 \cup F_2$, где F_1, F_2 – свободные подмодули в A^n ранга m, а $E_1(\omega)$ был замкнут.*

Список литературы

1. *Plucker J.* Neu Geometrie des Raumes gegrundet auf die gerade Linie als Raumelement. Leipzig, 1868–1869.
2. *Segre S.* Mehrdimensionale Raume. Encyklopadie der Mathematischen Wissenschaften. III. C7, 1915.
3. *Martinet J.* Sur les singularités des formes differentielles // Ann. Inst. Fourier. 1970. V. 20. № 1. P. 95–178.
4. *Busemann H., Glassco D. E.* Irreducible sums of simple multivectors // Pacific J. Math. 1973. V. 49. № 4. P. 13–32.
5. *Бурбаки Н.* Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра. М.: Физматгиз, 1962.
6. *Клейнер Г. Б.* Поливекторы ранга 2 // УМН. 1974. Т. 29. № 3. С. 204–208.
7. *Towber J.* Complete reducibility in exterior algebra over free modules // J. Algebra. 1968. V. 10. № 3. P. 299–309.
8. *Клейнер Г. Б.* О плюккеровых свойствах колец // Матем. сб. 1971. Т. 84. № 4. С. 526–536.
9. *Клейнер Г. Б.* Замечание о детерминантных последовательностях // Труды объединения математических кафедр педагогических институтов центральной зоны РСФСР. Т. 1. № 1–2, 1972. С. 109–114.

10. *Lim M. J. S.* Rank k Grassman products // Pacific J. Math. 1969. V. 29. № 2. P. 367–374.
11. *Котлярский М. А.* Два замечания о плюккеровых кольцах // УМН. 1975. Т. 30. № 2. С. 213.

Центральный экономико-математический институт РАН,
г. Москва
E-mail: kleiner@cemi.rssi.ru

Поступила в редакцию
08.11.2000