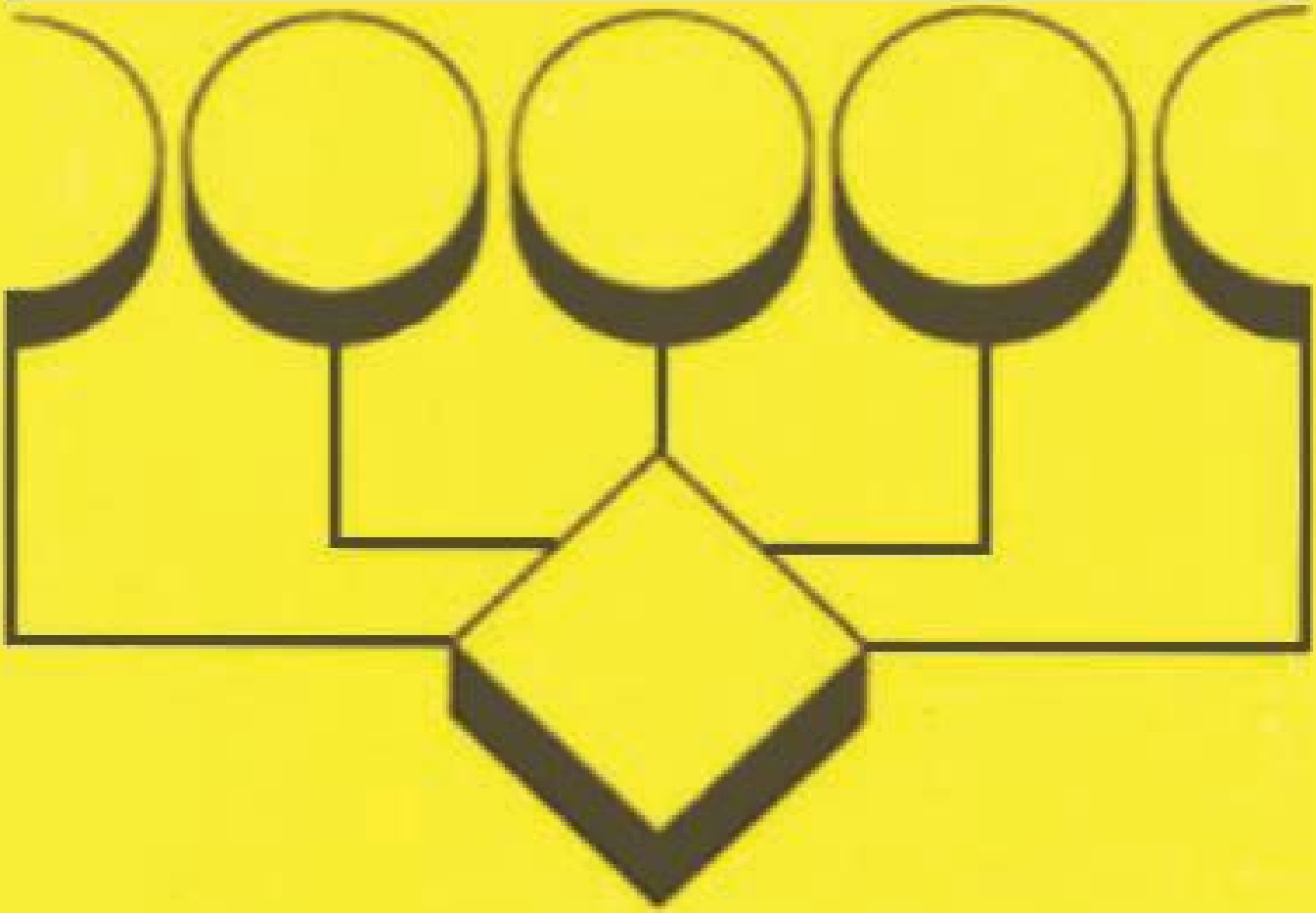
Г.Б. Клейнер

ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ



Г. Б. Клейнер

ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ

ТЕОРИЯ, МЕТОДЫ, ПРИМЕНЕНИЕ

МОСКВА
„ФИНАНСЫ И СТАТИСТИКА"
1986

ББК 22.172
К48

Рецензенты: *Ершов Э. Б., Демиденко Е. З.*

Клейнер Г. Б.

К48 Производственные функции: Теория, методы, применение. — М.: Финансы и статистика, 1986. — 239 с.

Производственные функции рассматриваются в монографии как экономико-статистические модели, выражающие соотношения между выпуском продукции и объемами ресурсов. Исследуются все этапы построения и использования моделей вплоть до программного обеспечения. Особое внимание уделяется практическому применению производственных функций в экономическом анализе, планировании и прогнозировании.

Для статистиков, экономистов, плановиков, а также разработчиков АСУ и специалистов по прикладной математике.

К $\frac{0702000000-028}{010(01)-86}$ 22—86 ББК 22.172

ПРЕДИСЛОВИЕ

Повышение научного уровня планирования социально-экономического развития страны является одной из главных задач совершенствования управления экономикой на современном этапе [2].

«Жизнь предъявляет более высокие требования к планированию, являющемуся сердцевиной управления. Оно должно стать активным рычагом интенсификации производства, осуществления прогрессивных хозяйственных решений, обеспечивать сбалансированный и динамичный рост экономики», — указывалось на апрельском (1985 г.) Пленуме ЦК КПСС [3]. Ориентация на достижение высоких конечных результатов производства при наименьших затратах и рациональном использовании производственных ресурсов должна пронизывать все стадии и уровни планирования — от предприятия до народного хозяйства в целом. Для реализации этой задачи необходимо четко представлять и использовать в процессе формирования, анализа и обоснования плановых вариантов все те объективные зависимости, которые существуют между исходными условиями и конечными результатами работы каждой конкретной хозяйственной системы, прежде всего показателями ресурсов и выпуска продукции. Одной из форм математического выражения такой зависимости служат производственные функции — характерные для данной экономической системы соотношения между объемом выпускаемой продукции и размерами основных производственных ресурсов.

Отражая в сжатой форме один из главных экономических процессов — процесс производства продукции, производственные функции служат полезным инструментом, позволяющим проводить разнообразные аналитические расчеты, определять эффективность использования ресурсов и целесообразность их дополнительного вовлечения в производство, прогнозировать выпуск продукции и контролировать реальность плановых проектировок. Важную роль играют производственные функции и в качественном исследовании экономических систем, являясь неотъемлемой частью

большинства комплексных моделей экономической динамики.

По мере развития автоматизированных систем управления хозяйственными объектами различного уровня, повышения роли подсистем перспективного планирования, прогнозирования и ретроспективного анализа, в них все чаще включаются производственные функции как средство решения ряда планово-экономических задач.

Предлагаемая читателю книга содержит систематическое изложение теории производственных функций и практические рекомендации по их построению и использованию. В основе концепции производственной функции, которой придерживается автор, лежат два принципа моделирования: целевая направленность и аппроксимационный характер экономико-статистических моделей. *Принцип целенаправленности моделирования* состоит в последовательном использовании информации о цели построения модели и сфере ее последующего применения практически на всех этапах построения производственной функции — от формирования информационной базы до вычислительных методов оценки параметров. Поскольку цели моделирования могут быть различными, в качестве моделей одного и того же процесса могут использоваться разные производственные функции.

Согласно *аппроксимационному принципу* каждая экономико-статистическая модель рассматривается как звено в системе аппроксимации — процесса последовательного, приближенного и все более точного описания реального явления. Производственная функция конкретного объекта при таком подходе не «истина в последней инстанции» и не выражение субъективного опыта исследователя, а результат поиска наиболее адекватного в данных условиях математического описания процесса производства в конкретной экономической системе. При этом условия построения производственной функции включают имеющуюся в данный момент информацию о характере функционирования производства, целях и доступных средствах моделирования. Те элементы исходной информации, которые относятся не к моделируемому объекту, а к применяемым средствам, или же носят условный характер, должны формулироваться в виде предпосылок аппроксимации. Хотя формулировка этих предпосылок иногда связана с известными трудностями, применение принципа аппроксимации при построении и истолковании производственной функции позволяет, по нашему мнению, не только расширить арсенал методов построения функций с помощью различных критериев и средств ап-

проксимации, но и избежать неправомерной интерпретации результатов использования построенной модели.

Особое внимание в книге уделяется анализу предпосылок, лежащих в основе применения производственной функции того или иного вида, связи теоретических вопросов с методикой применения производственных функций, определению сфер и границ их применения.

В построении производственных функций на базе статистических данных много общего с построением регрессионных моделей, при этом имеют место те же явные и скрытые трудности, с которыми связано применение регрессионного анализа. Простота аппарата регрессионного моделирования создает иллюзию его неограниченной применимости для описания любых зависимостей между показателями. Однако недостаточное внимание к исходным предположениям регрессионного анализа приводит порой к отрицательным результатам, вызывающим критику всего направления в целом. Для производственных функций в данной книге сделана попытка разработать такую методику экономико-статистического моделирования, которая не допускала бы расширительного применения и толкования его результатов и давала удовлетворительные результаты в случаях, когда применение производственной функции допустимо.

С различными вопросами, возникающими при разработке и применении производственных функций, сталкивается широкий круг экономистов. В него входят экономисты-математики, разрабатывающие инструментарий и методологию экономико-математического моделирования; системные аналитики и разработчики моделей конкретных хозяйственных систем; экономисты-практики, непосредственно применяющие производственные функции в своей работе. В связи с этим отдельные параграфы книги адресованы различным категориям читателей и написаны с неодинаковой степенью строгости. В ходе изложения все основные используемые экономические, математические и статистические понятия определяются или разъясняются.

Автор выражает глубокую благодарность Э. Б. Ершову и Е. З. Демиденко, чьи ценные советы и замечания способствовали улучшению рукописи.

Глава 1

ЭКОНОМИКО-СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПРОЦЕССОВ

1.1. ОСОБЕННОСТИ ЭКОНОМИКО-СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

1.1.1. Производственный процесс и его экономико-математическая модель

Главной задачей социалистического предприятия, объединения, отрасли является удовлетворение производственных и других потребностей народного хозяйства в определенных видах товаров или услуг. Эта задача осуществляется путем организации производственного процесса — процесса переработки сырья, материалов, полуфабрикатов в готовую продукцию, реализуемую потребителю. Для обеспечения нормального протекания этого основного процесса необходим ряд других, вспомогательных, процессов, таких, как материально-техническое снабжение, капитальный ремонт, реконструкция и модернизация оборудования, финансирование затрат на производство, обеспечение его кадрами соответствующей квалификации, а также разнообразной документацией, необходимой для производства изделий. Кроме того, в функции предприятия или производственного объединения входят реализация и доставка к потребителю произведенной продукции и т. д. В результате любая, даже относительно малая по масштабу, хозяйственная единица представляет собой сложную систему, в которой взаимодействуют десятки экономических, технических и социальных процессов, постоянно изменяющихся под воздействием внешних условий, в том числе научно-технического прогресса.

В такой ситуации управление производственными объектами превращается в задачу, требующую применения специальных средств анализа и планирования. Одним из таких средств является экономико-математическое моделирование.

Уточним основные понятия экономико-математического моделирования, на которые мы будем опираться в процессе

изложения. Как известно, суть математического моделирования состоит в замене реального объекта некоторой математической конструкцией (*математической моделью*), в том или ином смысле отражающей характерные черты моделируемого процесса. При этом между некоторыми характеристиками модели и свойствами процесса устанавливается двусторонняя связь, благодаря которой, с одной стороны, мы можем использовать данные об особенностях процесса для построения и уточнения его модели, с другой — интерпретировать результаты ее исследования в терминах, непосредственно характеризующих свойства процесса.

Сами по себе математические объекты — матрицы, функции, уравнения и т. п., являясь результатами абстрагирования свойств многих реальных объектов или процессов, утрачивают связь с конкретными процессами и служат исходным «материалом» для моделирования. Их также можно называть математическими моделями, если не требовать разъяснения, какой реальный процесс и с какой целью моделируется. Для того чтобы связать такой математический объект с реальным объектом и говорить не о модели «вообще», а о модели конкретного объекта, необходимо указать способы использования информации об объекте для построения и уточнения модели (т. е. *идентификации модели* или ее компонентов), а также способы и возможности использования модели для исследования свойств объекта (способы *интерпретации модели* или ее компонентов). Таким образом, под математической моделью данного процесса мы будем понимать математическую конструкцию, являющуюся результатом идентификации и снабженную правилами дальнейшей идентификации и интерпретации ее компонентов.

Процесс идентификации модели на основе данных о реальном объекте с другой точки зрения может рассматриваться как процесс измерения различных характеристик объекта; инструментом измерения при этом служит сама идентифицируемая модель.

Для связи между реальным производственным процессом и его математической моделью используется множество *показателей*. Каждый из них представляет собой способ определения количественной характеристики процесса [12]. В ряде случаев значения показателей даются не в числовых, а в порядковых или номинальных шкалах [44]. Тогда показатели именуются *признаками*.

Исходными данными для вычисления фактических значений количественных показателей служат результаты непосредственных измерений (наблюдений) или рассчитанные заранее значения других показателей. Для фактических

значений *экономических показателей* характерно, что первичными исходными данными являются данные бухгалтерского учета и статистической отчетности.

Экономико-математические модели выделяются среди математических моделей тем, что объектом моделирования являются экономические процессы, а сами модели отражают экономические связи и отношения, существующие в реальных процессах или явлениях. При идентификации и интерпретации экономико-математических моделей используются экономические показатели.

1.1.2. Основные характеристики экономико-математических моделей

Каждая экономико-математическая модель реального явления характеризуется: а) объектом моделирования; б) системным описанием объекта; в) целями построения модели; г) принципами моделирования; д) аппаратом моделирования; е) способами идентификации и интерпретации.

Объектом моделирования может быть либо реальная хозяйственная система, либо один или несколько процессов, протекающих в такой системе. Для построения модели необходимо не просто указать наименование объекта, а дать его описание в виде системы, т. е. определить его границы взаимодействия с внешней средой, его структуру. Модели, отражающие один и тот же объект с различных точек зрения, следует считать различными.

Построение модели само по себе не является самоцелью. Большинство экономико-математических моделей строится с вполне конкретными целями, для решения определенных планово-аналитических задач. Учет этих целей необходим при разработке и идентификации модели, для правильной формулировки понятия адекватности модели и методов ее проверки. Понятие адекватности модели имеет две различные грани [48]. Во-первых, можно говорить об адекватности модели изучаемому реальному процессу, понимая под этим степень соответствия между его характеристиками и характеристиками модели. Во-вторых, следует оценивать адекватность поставленной задаче.

Поскольку модель представляет собой существенно упрощенный образ реальности, какие-то ее стороны не находят отражения в модели, в то время как другим уделяется особое внимание. В основе каждой модели лежит система предпосылок, определяющих исходные принципы построения модели. Формулировка и последовательная реализация этих принципов при построении модели необходимы для

правильного понимания смысла результатов, полученных с помощью модели.

Аппарат моделирования определяется типом математических конструкций, используемых для построения модели. Наиболее распространенными являются модели, построенные с помощью аппарата матричной алгебры, линейного программирования, регрессионного анализа. Иногда говорят о специфическом «аппарате производственных функций». Выбор того или иного аппарата моделирования в значительной мере опирается на предпосылки, положенные в основу модели.

Наконец, последнюю группу характеристик модели составляют способы идентификации и интерпретации модели. Для иллюстрации рассмотрим следующий пример. Предположим, что в уравнении

$$y = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n,$$

связывающем выходной показатель процесса y с входными показателями $x_1, \ldots, x_n$, параметры $a_1, \ldots, a_n$ определялись в одном случае методом наименьших квадратов (см., например, § 2.4), в другом — методом экспертных оценок. Полученные модели будем считать различными моделями одного и того же процесса. Аналогичным образом различное истолкование показателей $x_1, \ldots, x_n, y$ в этом выражении также приводит к разным моделям.

Приведенные шесть групп характеристик, конечно, не определяют экономико-математическую модель однозначно, однако они содержат достаточную информацию для проводимой в дальнейшем классификации моделей с целью выделения среди них производственной функции. Более подробную систему признаков можно найти в [17].

1.1.3. Экономико-статистические модели

Обычно величины, входящие в экономико-математическую модель, делятся на две группы: переменные и коэффициенты (параметры). Коэффициенты не зависят непосредственно от других величин модели и образуют как бы каркас модели, на котором располагаются все ее остальные компоненты. Поэтому в экономико-статистической литературе иногда коэффициенты называются структурными параметрами модели [49].

Деление величин на переменные модели и ее параметры не абсолютно. В зависимости от того, какие задачи решаются с помощью данной модели, одна и та же величина может рассматриваться либо как переменная, получающаяся

в результате решения модели, либо как постоянная, определяемая до использования модели.

Процесс идентификации модели состоит из двух частей: во-первых, переменные модели отождествляются с показателями деятельности моделируемого объекта, во-вторых, коэффициенты получают конкретные числовые значения (или задаются с помощью распределения вероятностей). Этот последний процесс называют *спецификацией* коэффициентов.

Спецификация коэффициентов может осуществляться либо на основе нормативной информации, т. е. информации, содержащейся в нормативных актах и планах, регламентирующих деятельность хозяйственных систем, либо на основе экспертной информации, либо на основе статистической и бухгалтерской информации с применением методов статистической обработки.

Если параметры экономико-математической модели определяются на основе статистической информации с использованием методов статистической обработки данных, то модель называется *экономико-статистической*. На практике в большинстве моделей используется как нормативная и экспертная, так и статистическая информация. Оптимальное соотношение между этими видами информации зависит от конкретного объекта, модели и цели ее построения. Однако обычно «насыщение» модели статистической информацией, носящей более объективный характер, повышает точность моделирования [40].

1.1.4. Задачи экономико-статистического анализа и моделирования производственных процессов

Функционирование хозяйственных систем носит целенаправленный характер. Для целенаправленных процессов характерно, что каждый из них можно представлять как систему с определенным выходом и входом, преобразующую исходные материалы или данные в конечный результат процесса. В такой ситуации состояние системы определяется совокупностью условий и средств, обеспечивающих протекание процесса [9].

Один из основных методологических принципов системного анализа процессов состоит в возможно более адекватном определении входов, выходов и состояний каждого из исследуемых процессов и определении схемы их взаимодействия.

Наиболее простой и общей концепцией модели, отражающей связь между выходом, входом и состоянием процесса, является понятие автомата.

Математическая модель производственной системы называется *автоматом*, если она включает в себя: множество U, интерпретируемое как множество возможных входных воздействий (различного вида ресурсов, оборудования и т. д.), множество Y, соответствующее возможным выходам системы (продукция, услуги, вклад в прирост национального богатства и т. д.), и множество X, каждый элемент которого характеризует состояние системы в данный период. Кроме того, задаются два отображения: переходное отображение φ: $U \times X \to X$ и выходное отображение ψ: $X \to Y$. Каждому моменту дискретного времени t соответствуют входное воздействие $u(t) \in U$, состояние $x(t) \in X$ и выход $y(t) \in Y$, а переход от момента t к $t+1$ задается с помощью отображений φ и ψ: $x(t+1) = \varphi(x(t), u(t))$, $y(t+1) = \psi(x(t+1))$.

Смысл понятия автомата в том, что все течение процесса разбивается на отдельные дискретные шаги, в каждом из которых связь между входом и выходом системы опосредуется с помощью понятия состояния, аккумулирующего в себе достаточную информацию о прошлом развитии системы. По существу автомат является простейшей дискретной моделью, отражающей понятия входа, выхода и состояния (при этом само описание отображений φ и ψ может быть достаточно сложным). Большинство используемых в настоящее время экономико-математических моделей представляют собой либо целиком автомат, либо одну из его частей — переходное или выходное отображение.

Для процесса производства продукции — главного хозяйственного процесса в хозяйственной системе — выходом служит готовая товарная продукция, входы определяются поставками сырья, материалов, комплектующих изделий, оборудования, приростом трудовых и финансовых ресурсов, а состояние — накопленными запасами средств производства и рабочей силы. В современных промышленных системах произведенная продукция является результатом совместного функционирования многих производственно-хозяйственных процессов, испытывающих на себе неодинаковое влияние окружающей обстановки и обладающих различной степенью инерционности. В этих условиях определить количественно зависимость между выходом и входом производственного процесса, с достаточной полнотой реконструировав внутреннюю структуру процесса, как правило, невозможно. С другой стороны, известная устойчивость функционирования самого моделируемого объекта как экономической системы дает основания рассчитывать на получение «внешнего» описания процесса с помощью обработки ста-

тистических данных. Эти обстоятельства создают необходимые предпосылки для применения экономико-статистического моделирования в качестве одного из средств анализа и управления процессом производства.

В экономической науке и хозяйственной практике установилась следующая классификация задач управления: оперативный контроль и регулирование; текущее (годовое) планирование; пятилетнее планирование; долгосрочное перспективное планирование; прогнозирование; ретроспективный экономический анализ.

В принципе экономико-статистические модели могут применяться для решения задач всех перечисленных функций управления. Однако в зависимости от задачи, для решения которой строится модель, к ней предъявляются специфические требования, касающиеся ее вида, параметров, области использования.

Разработка системы экономико-статистических моделей процесса производства по существу равносильна созданию своеобразного «паспорта» данного хозяйственного объекта, так как в таких моделях в обобщенном виде суммированы объективные данные о ходе этого процесса.

1.2. ПРОИЗВОДСТВЕННАЯ ФУНКЦИЯ КАК ЭКОНОМИКО-СТАТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОИЗВОДСТВЕННОГО ПРОЦЕССА

1.2.1. Общее понятие производственной функции

Наша ближайшая задача — выделить, пользуясь приведенной выше классификацией, из множества всех экономико-математических моделей производственную функцию (ПФ) как особый вид экономико-статистических моделей. Рассмотрим с этой целью содержание каждого из признаков *а* — *е* п. 1.1.2:

а) **объект моделирования.** Непосредственным объектом моделирования для ПФ являются процессы производства продукции в реально функционирующих в течение определенного времени хозяйственных системах — на предприятии, в объединении, отрасли, регионе или в народном хозяйстве в целом. Соответственно уровню моделируемой системы в структуре управления народным хозяйством производственные функции делятся на народнохозяйственные, региональные, отраслевые, а также производственные функции объединений и предприятий.

В ряде случаев в качестве самостоятельного объекта моделирования рассматривается не вся хозяйственная система, а ее часть, состоящая из технологически относительно однородных производственных единиц. Для излагаемой концепции ПФ во всех случаях характерно отражение функционирования моделируемого объекта как единого целого, без учета его организационной структуры (в процессе построения ПФ его структурные характеристики могут тем не менее приниматься во внимание, см. § 2.1);

б) **системное описание объекта.** В теории производственных функций производственный процесс рассматривается с точки зрения преобразования ресурсов в продукцию. Входами при этом являются потоки ресурсов различного вида, полностью или частично используемые при производстве, выходом — готовая к реализации продукция. Функционирующие в системе ресурсы, технология и условия организации производства определяют потенциальные возможности и состояние процесса;

в) **цели моделирования.** Производственная функция строится для решения определенных экономических задач, относящихся к анализу, прогнозированию и планированию (в узком смысле слова). Применяются производственные функции как самостоятельно, так и в составе более сложных экономико-математических моделей. В общем виде цель построения производственной функции можно охарактеризовать как анализ факторов роста или прогнозирование объема выпуска продукции.

Однако в каждой конкретной ситуации эта цель имеет свои особенности, существенно влияющие на процесс построения функции. Целесообразно различать следующие возможные способы использования ПФ: 1) определение объема выпуска при фиксированных заранее значениях показателей основных ресурсов (в случае, когда эти значения незначительно отличаются от наблюдавшихся в прошлом); 2) то же самое в случае значений ресурсов, существенно отличающихся от всех, наблюдавшихся в прошлом; 3) определение объемов выпуска при значениях показателей ресурсов, принадлежащих заданной непрерывной области (в частности, меняющихся в заданных пределах); 4) определение влияния на объем выпуска малого независимого изменения размеров одного или нескольких ресурсов; 5) определение характеристик производственного процесса, выражающихся через параметры производственной функции.

Конкретные варианты и способы решения планово-аналитических задач на основе производственных функций рассмотрены в гл. 4;

г) **принципы моделирования.** В основе принятого в данной работе понятия производственной функции лежат следующие принципы, играющие роль аксиоматических в теории производственных функций:

1) объем выпуска продукции, произведенной данной производственной системой за период, определяется размерами средств труда, предметов труда и собственно труда, участвующих в процессе производства в течение этого периода;

2) связь между объемом выпуска и размерами средств труда, предметов труда и собственно труда является для данной производственной системы закономерной и относительно устойчивой;

3) в ряде случаев дополнительно принимается, что в определенных границах любое независимое изменение аргументов производственной функции допускает реальную интерпретацию.

Принципы 1 и 2 подробно рассматриваются в п. 1.2.2, 1.2.3; принцип 3 — в п. 2.3.1;

д) **аппарат моделирования.** Основным «материалом» для построения производственной функции служат зависимости $y = f(x_1, \ldots, x_n)$, где y — объемный показатель выпуска, $x_1, \ldots, x_n$ — объемные показатели производственных ресурсов. (Число факторов производственной функции обычно не превосходит 10.) Функция f должна быть определенной в достаточно широкой области пространства R^n и *вычислимой* в области своего определения. Последнее означает, что исследователь должен располагать алгоритмом, позволяющим вычислять значения f в любой точке, где она определена. Обычно производственная функция $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ строится подбором наиболее подходящей функции из определенного параметрического класса $F = \{f_a(x_1, \ldots, x_n)\}$, где $a = (a_1, \ldots, a_k)$ — вектор параметров. Таким образом, непосредственным аппаратом моделирования в данной концепции производственной функции являются параметрические классы вычислимых функций от $n \leqslant 10$ переменных*. Как правило, зависимость функции f от переменных и параметров задается в явном виде или — реже — в виде функциональных, дифференциальных или интегральных уравнений;

е) **идентификация и интерпретация модели.** Переменные $y, x_1, \ldots, x_n$ отождествляются, как уже сказано выше, с показателями объемов выпуска и основных участвовавших

---

* В других концепциях понятия производственной функции основная зависимость представляется в виде регрессии или задачи математического программирования.

в производстве ресурсов. Предполагается возможность спецификации параметров $a_1, \ldots, a_k$ производственной функции на основе статистических данных о выпуске и ресурсах за прошедшие периоды, а также экспертных, плановых и косвенных данных. Метод оценки параметров не определяется однозначно и зависит от целей построения функции, особенностей моделируемого процесса и исходных данных. Примерами могут служить методы наименьших квадратов, наименьших модулей и т. д. Подробнее общая схема спецификации параметров изложена в гл. 2. Интерпретация параметров, в свою очередь, зависит от метода их оценки. Часто для интерпретации полученных параметров привлекаются их выражения через значения показателей y, $x_1, \ldots, x_n$ и значения частных производных $\frac{\partial y}{\partial x_i}$.

1.2.2. Экономическое содержание производственной функции

Итак, производственная функция является экономико-статистической моделью процесса производства продукции в данной экономической системе и выражает устойчивую, закономерную количественную зависимость между объемными показателями ресурсов и выпуска.

Существуют ли, однако, основания говорить о наличии такой связи для любых производственных систем? Рассмотрим этот вопрос, опираясь на анализ фундаментальных свойств производственных процессов, данный в трудах К. Маркса и Ф. Энгельса.

Основными элементами процесса производства являются, как известно, труд как сознательная целенаправленная деятельность человека, предметы труда и средства труда. Количество и качество произведенной продукции определяются количеством и структурой этих факторов, а также способом организации их взаимодействия. «Если рассматривать весь процесс с точки зрения его результата — продукта, то и средство труда и предмет труда оба выступают как средства производства, а самый труд — как производительный труд»,— писал К. Маркс, [1, т. 1, с. 192]. Следовательно, на качественном уровне описания производственного процесса совокупность его факторов вполне определена, является исчерпывающей и не зависит от того, какая производственная система рассматривается.

Переходя к более подробному анализу, в составе предметов труда выделяют сырье, материалы, полуфабрикаты и комплектующие изделия — все те элементы, которые впос-

ледствии войдут в изготавливаемую продукцию. Средства труда, в свою очередь, подразделяются на орудия труда (оборудование, машины, двигатели, инструменты и приспособления и т. д.), здания и сооружения, средства коммуникации и транспорта. Неоднородным по своему составу является и сам труд: в составе работающих различают отдельные профессионально-квалификационные группы рабочих и служащих.

Выпускаемая продукция, как правило, также неоднородна как по функциональным характеристикам, так и по способу производства. За определенный период времени (в большинстве случаев в качестве периода берется год) данная производственная система производит и реализует потребителям продукцию различной номенклатуры, используя при этом трудовые ресурсы, предметы и средства труда определенного объема и структуры.

Производственный процесс в первичном звене управления — производственном объединении (предприятии) — осуществляется на основе определенной *технологии*, т. е. совокупности приемов и способов переработки сырья, материалов, полуфабрикатов в готовую продукцию. Сведения о технологии производственного процесса содержатся в технологической документации.

Понятие технологии в узком смысле этого слова (элементарной технологии) относится к производству одного изделия (или продукта) определенного вида. Современное производство в подавляющем большинстве случаев многономенклатурно и реализует одновременно множество различных технологий. При этом появляются возможности комбинирования и сочетания технологий, различного распределения ресурсов между отдельными технологиями и подобъектами, что значительно ослабляет жесткость зависимости между ресурсами и выпуском продукции.

Реально существующий способ производства определяется, с одной стороны, стремлением к оптимальному сочетанию технологий, с другой — ограниченными возможностями по обеспечению ресурсами и их размещению. Ограничения последнего рода связаны со сложившимися тенденциями в развитии предприятия, размерами производственных площадей, квалификационным составом работников, а также с чисто экономическими ограничениями по таким показателям, как срок окупаемости капитальных вложений, материалоемкость продукции и т. д. По существу ограничения в применении технологий вызваны двумя основными причинами: невозможностью за короткий срок изменить состав и структуру производственных ресурсов и условиями,

налагаемыми внешней средой (народнохозяйственные требования).

Если речь идет об описании производственного процесса в течение длительного промежутка времени, то ограничения, связанные с превращаемостью ресурсов, ослабевают, и в качестве основного фактора, определяющего выпуск (наряду с составом и количеством ресурсов) выступают экономические ограничения народнохозяйственного уровня.

Подобно тому как понятие технологии производства изделия расширяется до понятия технологии многономенклатурного производства, естественный смысл приобретает и понятие технологии применительно к более крупным экономическим системам — промышленным объединениям, отраслям и регионам. В этом случае количество технологических способов, естественно, возрастает. Соответственно все бо́льшую роль начинают играть организационно-экономические аспекты, налагающие ограничения на возможности реализации оптимального сочетания отдельных элементарных технологий.

В итоге получаем следующий вывод: если известны количество и состав производственных ресурсов, технологических способов и организационно-экономические ограничения, то на основании этих данных можно определить объем и структуру выпуска. Совместно с организационно-экономическими ограничениями внешнего порядка технология, таким образом, задает отображение, которое определено на множестве всевозможных комбинаций исходных ресурсов и ставит в соответствие каждому набору ресурсов продукцию, которую можно произвести с их помощью на основе данной технологии.

Рассмотрим кратко вопрос об устойчивости технологии. В реальной производственной деятельности экономических систем технология проявляет лишь относительную стабильность. Постоянно совершенствуются орудия труда, появляются новые виды материалов, повышается квалификация работников, все шире внедряются в производство достижения науки. Влияние научно-технического прогресса приводит к тому, что устаревшие элементарные технологии постепенно заменяются другими, более совершенными. Вместе с тем производственные процессы в целом обладают некоторыми устойчивыми характеристиками.

Каждая экономическая система предназначена для удовлетворения потребности народного хозяйства в продукции определенного назначения. Несмотря на огромное количество позиций в списке номенклатуры изделий промышленности, их функциональные качества позволяют сформи-

ровать группы продукции, которые соответствуют относительно устойчивым функциям изделий и товаров и являются стабильными в течение длительного промежутка времени. Эти группы отражены в Общесоюзном классификаторе промышленной и сельскохозяйственной продукции (ОКП). Принадлежность основной продукции, выпускаемой данной экономической системой, к определенным классификационным группам служит достаточно устойчивой характеристикой данного хозяйственного объекта и меняется только при коренном изменении его функций.

Подобным образом относительно устойчивы и группы сырья, материалов и оборудования, используемые в производстве. Используя групповые характеристики ресурсов и продукции, можно говорить о групповой (агрегированной) технологии — способе переработки групп сырья, материалов, полуфабрикатов в готовую продукцию заданных функциональных групп. Такая технология описывает взаимодействие ресурсов уже не на уровне отдельных видов оборудования, оснастки, материалов и работников, а на уровне обобщенных агрегированных показателей затрат ресурсов. Построение таких показателей (кроме трудовых) опирается в основном на стоимостные категории.

На уровне агрегированных показателей результат производственного процесса, как и прежде, определяется агрегированной технологией, размерами групп ресурсов, а также организационно-экономическими ограничениями. Рассматривая совместно агрегированную технологию и организационно-экономические ограничения, будем говорить об *агрегированной экономической технологии*.

Техническое развитие предприятий, связанное в том числе и с изменением элементарных технологий, — процесс непрерывный. Однако обычно доля заменяемых технологий не слишком велика, поэтому, чем крупнее экономическая система и чем выше уровень агрегирования показателей, тем слабее сказывается этот процесс на агрегированной экономической технологии. Кроме того, для более крупных систем более важную роль играют внешние организационно-экономические условия и ограничения. В целом отсюда можно сделать вывод, что устойчивость агрегированной экономической технологии тем выше, чем выше уровень агрегирования и чем более крупная система рассматривается.

В некоторых системах изменение технологии носит вполне определенный, планомерный и направленный характер, причем доля заменяемых технологических процессов столь велика, что оказывает существенное влияние и на агрегированную экономическую технологию. В этом случае имеет

мысл говорить о *технологическом дрейфе* как о форме динамики агрегированной экономической технологии. Наконец, возможна ситуация, когда за короткий срок происходит коренная перестройка технологии, находящая отражение на всех уровнях ее описания. В этом случае говорят о технологическом скачке. Как правило, такой скачок сопровождается существенным изменением номенклатуры выпускаемой продукции и состава используемых ресурсов.

Следовательно, по отношению к агрегированной экономической технологии каждая экономическая система в заданном промежутке времени может быть либо относительно стабильной (наиболее распространенный случай), либо находиться в состоянии технологического дрейфа, либо претерпевать один или несколько технологических скачков. Поскольку производственная функция предназначена для отражения определенной агрегированной экономической технологии, в последнем случае период моделирования целесообразно изменить так, чтобы он не содержал технологических скачков. В случае устойчивого технологического дрейфа можно условно также рассматривать агрегированную экономическую технологию как постоянную, если ввести дополнительную переменную, отражающую действие факторов возникновения технологического скачка. В простейшем случае в качестве такой переменной берется номер периода. Иногда дрейфующую или скачкообразно изменяющуюся технологию условно рассматривают как постоянную, вводя в число факторов дополнительную переменную, которая отражает факторы смены технологий. В простейшем случае такой переменной является время (точнее, номер периода).

Вопрос об устойчивости агрегированной экономической технологии связан не только со стабильностью состава и интенсивности применяемой технологии, но и с неизменностью показателей, используемых для измерения ресурсов и выпуска. Для устойчивости технологии на заданном промежутке времени необходимо, чтобы в этот период показатели ресурсов и выпуска либо оставались неизменными, либо менялись согласованно.

Наиболее высокий уровень агрегирования показателей при описании технологии достигается, если весь произведенный продукт измеряется единым объемным показателем (например, стоимостью товарной продукции). Измерение выхода производственного процесса одним числом определяет и способ измерения входа системы. В качестве категорий того же уровня, что и категория «товарная продукция» К. Маркс называет средства труда, предметы труда и сам

труд. Максимально агрегированная объемная оценка произведенного продукта обусловливает столь же агрегированное измерение объемов труда, его средств и предметов. Если такая оценка произведена, то объем выпуска будет находиться в достаточно определенных соотношениях с объемами входных ресурсов. «Требуется определенная масса рабочей силы, представленная определенным числом рабочих, чтобы произвести определенную массу продукта... и, следовательно... привести в движение, потребить производительно определенную массу средств производства, машин, сырья и т. д.»,— писал К. Маркс [1, т. 3, с. 157].

Наивысшая степень агрегирования показателей ресурсов достигается, если все производственные ресурсы характеризуются двумя показателями, отражающими количество овеществленного (прошлого) и живого труда. Овеществленный труд характеризуется показателем «производственные фонды», в качестве показателя живого труда используется один из показателей численности работников. Однако, поскольку характер участия средств и предметов труда в производственном процессе совершенно различен, их измерение с помощью одного суммарного показателя целесообразно, как правило, только для крупномасштабных производственных систем, таких, как крупная отрасль, регион, народное хозяйство в целом.

Таким образом, анализ «простых моментов» процесса производства приводит к выводу о существовании объективной связи между объемом выпуска продукции и размерами затраченных при этом труда, его средств и предметов. Эта связь, отмеченная в трудах К. Маркса, является характерной и относительно устойчивой для экономических систем любого уровня, технология производства в которых не претерпевает существенных скачков. Отражение и количественное определение этой связи и составляет экономическое содержание понятия производственной функции.

1.2.3. Системный анализ производственной функции

Средства труда и предметы труда по-разному участвуют в производстве продукции. Если первые переносят свою стоимость на продукт в течение длительного периода, то вторые входят непосредственно в состав готовой продукции и переносят свою стоимость на продукт в течение одного производственного цикла.

Показатели, размерности которых имеют вид «количество в единицу времени», характеризуют материальные, фи-

ансовые и другие *потоки* в соответствующую единицу времени. Показатели, полученные суммированием (или, если время считается непрерывным, интегрированием) потоковых показателей за период, характеризуют *запас* соответствующего вида. На практике потоки и запасы рассматриваются по отношению к конкретной хозяйственной системе, причем потоки определяются на входе и на выходе системы, а запас — как разность между суммарным (интегральным) потоком на входе и на выходе системы. Связь между показателями запаса и потока аналогична связи между определенным интегралом некоторой функции от времени и самой функцией.

Основным результатом (выходом) производственной системы является готовая продукция. Она измеряется с помощью различных потоковых показателей. Те компоненты средств производства, которые потребляются в одном производственном цикле и входят в состав готовой продукции, также измеряются потоковыми показателями. Например, затраты сырья, материалов, энергии измеряются количеством в единицу времени — год, квартал, месяц. Напротив, ресурсы, относящиеся к основным фондам, оцениваются показателями типа «запас» (на определенную дату или в среднем за период).

Показатели потока ресурсов характеризуют в первую очередь взаимоотношения производственной системы с окружающей средой, показатели запасов характеризуют собственное состояние системы. Эти группы показателей не являются независимыми: потоки ресурсов, поступающие на предприятие, увеличивают его запасы. Так, поток сырья и материалов позволяет создать их запас для бесперебойного хода производства. Потоки ресурсов, поступающие на предприятие, обычно участвуют в производстве лишь пройдя стадию запаса. При этом переход конкретного предмета из «потока» в «запас» происходит не мгновенно, а в течение некоторого периода времени, затрачиваемого на разгрузку, складирование, установку и т. п. Таким образом, общий процесс производства можно представлять как совокупность двух процессов: формирования запаса средств труда, предметов труда и трудовых ресурсов и переработки их в готовую продукцию (рис. 1.1).

При этом вход системы характеризуют показатели типа «поток», состояние — показатели типа «запас», показатель выхода системы — объем выпуска продукции в стоимостном выражении за год — также типа «поток».

Какая же роль в системном описании производственного объекта отводится производственной функции? В основе по-

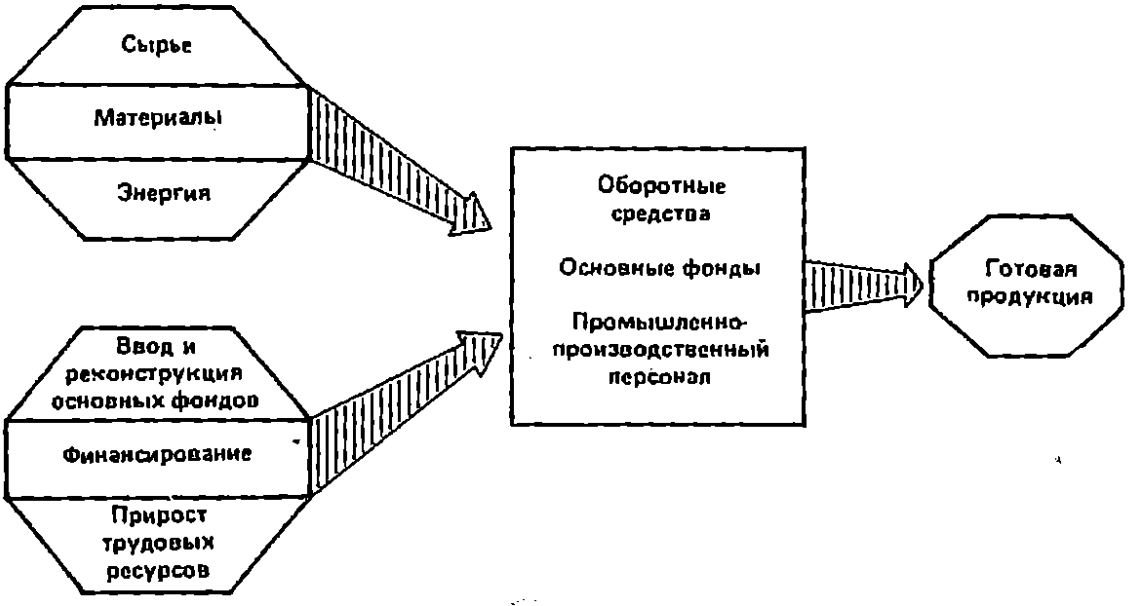


Рис. 1.1

нятия производственной функции лежит, как указано в [18], представление об изучаемом экономическом объекте как об открытой динамической системе, выходом которой является производимая продукция, а входом — затраты различных видов ресурсов производства. Согласно [18] производственная функция «выражает устойчивое количественное соотношение между входами и выходами» такой системы. На наш взгляд, такое понимание производственной функции чрезмерно широко. В теории динамических систем отображение «вход-выход», для моделирования которого согласно [18] предназначена производственная функция, обычно рассматривается как композиция отображения перехода и выходного отображения [28]. Именно в декомпозиции отображения «вход-выход» заключается смысл введения понятия «состояния» системы. Поскольку, как видно из изложенного выше, процесс функционирования системы по своему содержанию распадается на два процесса — формирование запасов и непосредственно производство готовой продукции, его моделирование целесообразно проводить на основе концепции автомата, с декомпозицией отображения «вход-выход» на переходное и выходное. Производственной функции в этой концепции отводится место выходного отображения, которое определено на множестве состояний, а принимает значения в множестве выходов.

Вопрос о числе и составе аргументов производственной функции сводится, следовательно, к вопросу о показателях, характеризующих состояние производственной системы. Определяющими для состояния таких систем в общем слу-

чае являются запасы средств труда, предметов труда и трудовые ресурсы. Объемным показателем средств труда (кроме малоценных и быстроизнашивающихся) является стоимость основных фондов. Объем используемых предметов труда характеризуется двумя основными показателями — стоимостью оборотных фондов и размером оборотных средств. Первый из них, однако, не полностью характеризует состояние системы с точки зрения влияния на объем выпуска, поскольку не полностью отражает наличие достаточных финансовых ресурсов для хозяйственной деятельности. Поэтому в качестве основного показателя предметов труда в системе аргументов производственной функции используется не стоимость оборотных фондов, а более объемный показатель размера оборотных средств (см. также [45]). Размеры трудовых ресурсов наиболее часто оцениваются с помощью показателя численности работников или промышленно-производственного персонала.

Указанный набор показателей является базисным для аргументов производственной функции. Это не исключает того, что в условиях функционирования конкретной системы производственную функцию следует строить исходя из особого списка аргументов. Если деятельность системы протекает в условиях непропорционального развития и ресурсы какого-либо вида в течение длительного периода дефицитны, то объем дефицитного ресурса может быть включен в число аргументов производственной функции непосредственно. Таким ресурсом может стать оборудование определенной группы, вид дефицитного сырья или численность работающих данной квалификации. Условиями для этого являются: а) затруднительность или невозможность в рамках существующей технологии замены данного вида ресурсов другим; б) длительная нехватка этого ресурса для нормальной работы системы.

На рис. 1.1 пространство состояний производственной системы представлено тремя показателями и может рассматриваться, следовательно, как часть трехмерного пространства R^3. Однако это не означает еще, что размерность множества состояний равна трем. Возможно, что эти показатели для конкретной системы принимают не произвольные, а лишь вполне определенные значения, например показатель численности работников может однозначно определять остальные два показателя. Множество значений, которые могут принимать аргументы производственной функции, называется *областью* ее *определения*. Одновременно это множество является множеством значений показателей состояния системы. Его конфигурация и объем зависят от того, каким

образом организованы материально-техническое снабжение, финансирование и прирост трудовых ресурсов в данной экономической системе, а также от способов распределения ресурсов между подсистемами. Если рассматривается производственная система микроуровня, то диапазон изменения соотношения основных фондов, оборотных средств и численности, как правило, невелик. В предельном случае, когда рассматривается рабочее место, соотношение между этими показателями строго определено техническими нормами. Здесь область определения производственной функции по существу одномерна: зная один из показателей состояния, мы можем определить остальные. С ростом масштабов производства растет и допуск в соотношениях между рассматриваемыми показателями, увеличивается размерность множества состояний. Для численного определения размерности пространства факторов можно использовать, например, метод главных компонент [25].

1.2.4. Математико-статистические свойства производственной функции

Способ построения ПФ (как и многих других экономико-математических моделей) в самых общих чертах состоит в следующем: из ряда «пробных» функций выбирают такую, характеристики и поведение которой в наибольшей степени согласуются с имеющейся статистической и другой информацией о технологии и протекании производственного процесса в прошлом и будущем.

Процесс выбора обычно разбивается на ряд дискретных шагов, на каждом из которых текущая «пробная» функция (или группа их) сравнивается с пробной функцией (или группой) одного или нескольких предшествующих шагов. На основе результатов этого сравнения формируется новая пробная функция (группа), лучше соответствующая имеющейся информации о моделируемом процессе. Вычисления заканчиваются, если информация, полученная в результате сравнения, не позволяет найти новую группу функций, отличную от найденной ранее.

Такой процесс построения производственной функции указывает на ее аппроксимационный характер, отражает последовательное приближение к некоторому объекту. Что же это за объект? В основе процесса аппроксимации при построении производственной функции лежит предположение о существовании некоторой идеальной модели системы, полностью соответствующей поставленным целям. Поэтому для формального определения понятия производствен-

ной функции нам надлежит, во-первых, определить объект аппроксимации как математическую конструкцию, являющуюся моделью реальной хозяйственной системы, во-вторых, формализовать задачу аппроксимации этой модели на основе имеющихся статистических и других данных.

Первая часть этой программы реализуется в п. 1.2.5, вторая излагается ниже.

Схема любой *аппроксимационной задачи* (AS) включает в себя: а) подлежащий аппроксимации математический объект a; б) множество E математических объектов, являющихся средствами аппроксимации; в) правило ρ сравнения элементов множества E по их близости к объекту аппроксимации; г) вычислительную процедуру V поиска среди элементов множества E таких, которые согласно правилу ρ наилучшим образом аппроксимируют a:

$$AS = \langle a,\ E,\ \rho,\ V \rangle. \qquad (1.1)$$

Рассмотрим подробнее эти четыре компонента аппроксимационной схемы. Элемент a и элементы множества E могут иметь, вообще говоря, произвольную математическую природу, однако обычно это объекты одного типа. Объект a задается, как правило, неявным образом — через его свойства или характеристики. Естественно, что в такой ситуации возникает вопрос о существовании элемента с заданными свойствами и характеристиками. Решается этот вопрос по-разному, в некоторых случаях удается обосновать его существование теоретически, однако чаще удается доказать, что в рассматриваемом классе такого объекта нет (например, если a — решение задачи линейного программирования с несовместными ограничениями). В этой ситуации постановка аппроксимационной задачи должна быть пересмотрена.

При поиске элемента множества E, который бы наилучшим образом аппроксимировал элемент a, необходимо иметь возможность сравнивать два пробных элемента e_1 и $e_2 \in E$ по их близости к a и определять, какой из них ближе. Это значит, что на множестве E должно быть задано бинарное отношение ρ, т. е. подмножество тех пар $(e_1, e_2) \in E$, для которого известно, что e_1 не дальше от a, чем e_2. (Эта ситуация записывается либо как $(e_1, e_2) \in \rho$, либо как $e_1 \rho e_2$.) Цель аппроксимации состоит в отыскании такого элемента $\widehat{a} \in E$, что а) $\widehat{a} \rho \widehat{a}$ и б) не существует элемента $e \neq \widehat{a}$ из E, для которого $e \rho \widehat{a}$.

Элемент $\widehat{a}$ с такими свойствами назовем *экстремальным* относительно ρ (обозначение: $\widehat{a} = \operatorname{extr} \rho$).

Таким образом, аппроксимационная задача обычно считается решенной, если найден хотя бы один экстремальный элемент отношения ρ.

Отношение ρ может служить базой для направленного поиска экстремальных элементов, если оно *транзитивно* (т. е. если $e\rho e'$ и $e'\rho e''$, то $e\rho e''$) и квазирефлексивно (т. е. если для данного элемента $e \in E$ существует такой элемент $e' \in E$, что $e\rho e'$, то $e\rho e$). Смысл последнего условия в следующем. На практике в качестве множества E часто первоначально берется более широкое, чем это необходимо для аппроксимации конкретного элемента a, множество, которое затем поэтапно сужается. Поэтому не всякий элемент $e \in E$ может служить средством аппроксимации элемента a, поэтому не всегда $e\rho e$; однако если e допускает сравнение по близости к a хотя бы с одним другим элементом $e' \in E$, то он и сам включается в число «кандидатов» на роль экстремального элемента отношения ρ. Бинарное отношение, обладающее этими свойствами, называется *квазипорядком*.

Выражение правила сравнения близости элементов через бинарное отношение является весьма общим. Более частное описание качества аппроксимации может быть получено с помощью критерия аппроксимации — числовой функции на множестве E, которая каждому элементу $e \in E$ ставит в соответствие число, характеризующее степень близости e к a. Этот способ допускает выражение на языке бинарных отношений: достаточно считать, что элементы e_1 и e_2 из E находятся в отношении ρ, если значение критерия аппроксимации для элемента e_1 не больше, чем для элемента e_2. Такое отношение называется *критериальным*.

Большинство современных методов решения задач оптимизации основаны на построении последовательности точек (или групп точек) из множества E, один из следующих членов которой ближе к оптимальной точке, чем данный. Переход от одной точки к другой осуществляется с помощью функции поиска v_1, представляющей собой отображение k-й степени множества E в себя: для группы точек $e_1^{(i)}, \ldots, e_k^{(i)}$, полученных на i-й итерации, строится группа точек $v_1(e_1^{(i)}, \ldots, e_k^{(i)}) = (e_1^{(i+1)}, \ldots, e_k^{(i+1)})$. Вторым основным элементом вычислительного процесса является правило остановки v_2: $\underbrace{E \times \ldots \times E}_{k \text{ раз}} \to R^1$. Вычислительный процесс V заканчивается, как только $|v_2(e_1^{(i+1)}, \ldots, e_k^{(i+1)}) - v_2(e_1^{(i)}, \ldots, e_k^{(i)})| \leqslant \varepsilon$, где ε — заданное число. Таким образом,

$$V = \langle v_1 : \underbrace{E \times \ldots \times E}_{k \text{ раз}} \to \underbrace{E \times \ldots \times E}_{k \text{ раз}},\ v_2 : \underbrace{E \times \ldots \times E}_{k \text{ раз}} \to R^1 \rangle. \quad (1.2)$$

Разумеется, подобное обобщенное описание вычислительного алгоритма отражает лишь основные его черты. Тем не менее такой подход, реализованный в [50], позволил единообразным способом описать большинство существующих алгоритмов.

Важно отметить, что в результате применения вычислительной процедуры V мы сравнительно редко получаем искомую точку $\widehat{a} = \operatorname{extr}_E \rho$; обычно находится лишь одна или несколько точек, которые в каком-то смысле близки к $\widehat{a}$. Мера этой близости не связана с отношением ρ, а формируется с учетом особенностей вычислительного процесса. Таким образом, аппроксимационная схема имеет следующую структуру:

$$AS = \langle a, E, \rho, V \rangle,$$

где a — точка; E — множество; $\rho \subset E \times E$ — отношение квазипорядка на E; $V = \langle v_1, v_2 \rangle$ — совокупность функции поиска v_1: $E \times \ldots \times E \to E \times \ldots \times E$ и правила остановки v_2: $E \times \ldots \times E \to R^1$. Примеры аппроксимационных схем можно найти в [30].

Изложенная схема аппроксимационной задачи отражает основные черты процесса построения любой экономико-статистической модели, в том числе и производственной функции. В ходе дальнейшего изложения мы будем конкретизировать отдельные компоненты a, E, ρ, V схемы AS для производственной функции, рассматривая возможности и последствия выбора того или иного компонента и их совокупности. Начнем с объекта аппроксимации a.

1.2.5. Агрегированная экономическая технология

Согласно общему понятию производственной функции ее аргументы отражают объемы имеющихся в системе основных ресурсов, значения — объем выпуска, а сама функция — процесс преобразования этих ресурсов в продукцию. Характер и особенности этого процесса определяются, как указано выше, множеством технологических способов и организационно-экономическими ограничениями на их реализацию.

На уровне высокоагрегированных показателей, когда ресурсы измеряются объемами основных и оборотных фон-

дов, численностью промышленно-производственного персонала (ППП), а выпуск — одним стоимостным показателем, технологические возможности и ограничения отражаются в понятии агрегированной экономической технологии. Мы будем использовать это понятие также для обозначения математического объекта, представляющего собой гипотетическую полностью адекватную (точную) модель производственного процесса на избранном уровне описания. Именно агрегированная экономическая технология служит объектом аппроксимации в аппроксимационной схеме построения производственной функции. Ниже дается формальное описание агрегированной экономической технологии.

Обозначим через res физический набор ресурсов производства, которые в течение года проходят состояние «запас». Эти ресурсы состоят из накопленных ранее в системе, а также поступивших на вход системы и прошедших состояние «запас» в данном периоде. Множество всех возможных таких наборов ресурсов обозначим через Res.

Организация производственного процесса обеспечивает с помощью имеющегося запаса ресурсов выпуск продукции определенного объема и структуры. Обозначим через prod каждый такой комплект продукции, выпускаемый за период, и через Prod = {prod} — множество всех возможных таких наборов.

Теперь производственная деятельность системы, точнее, присущие ей технологические и технико-экономические особенности могут быть представлены с помощью отображения

$$\Pi : \mathrm{Res} \to \mathrm{Prod}, \qquad (1.3)$$

которое каждому набору ресурсов res $\in$ Res ставит в соответствие комплект выпуска Π (res) = prod $\in$ Prod.

Каждый набор ресурсов res $\in$ Res и комплект продуктов prod $\in$ Prod допускает количественную оценку с помощью системы натуральных и стоимостных экономико-статистических показателей. Эти показатели характеризуют состав, движение и использование ресурсов, а также объем и структуру выпускаемой продукции.

Обозначим через μ систему показателей количественной оценки запасов средств и предметов труда, а также трудовых ресурсов. Каждому набору ресурсов res $\in$ Res с помощью системы показателей μ ставится в соответствие n-мерный вектор $u \in R^n$, где n — число позиций в списке ресурсов. Эти показатели строятся на основе существующих методов учета трудовых ресурсов и товарно-материальных ценностей, системы цен на производственные ресурсы и методов агрегирования показателей. Каждая координата u_i

вектора $u = \mu$ (res) выражает меру имеющегося количества ресурсов соответствующего вида, а число n — количество видов ресурсов. Множество значений отображения μ в n-мерном пространстве R^n обозначим через D.

Аналогично пусть ν — показатель оценки объема выпускаемой продукции, который каждому комплекту продуктов prod $\in$ Prod ставит в соответствие число ν (prod) $\in R^1$, выражающее его объемную (чаще стоимостную) оценку.

Обычно показатели ресурсов μ и выпуска ν согласуются друг с другом таким образом, что производственный процесс допускает описание в виде отображения τ множества μ (Res) $\subset R^n$ в множество ν (Prod) $\subset R^1$. Иными словами, существует отображение τ: $D \to R^1$, которое каждому вектору $u = \mu$ (res), выражающему оценку ресурсов res, ставит в соответствие оценку продукции, полученной с помощью этих ресурсов: $\tau(u) = \nu(\Pi(\text{res}))$. Таким образом, отображение τ должно удовлетворять условию

$$\mu \circ \tau = \Pi \circ \nu. \qquad (1.4)$$

Приведенное соотношение и служит формальным определением *агрегированной экономической технологии*. Множество D, являющееся областью значений показателя μ, будем называть также *областью определения агрегированной экономической технологии* τ.

Отношение между отображениями μ, ν, Π, τ можно иллюстрировать с помощью диаграммы

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\tau} & R \\ \uparrow{\scriptstyle\mu} & & \uparrow{\scriptstyle\nu} \\ \text{Res} & \xrightarrow{\Pi} & \text{Prod} \end{array}$$

Диаграмма такого вида называется коммутативной, если выполнено условие (1.4). Если трактовать стрелки на диаграмме как указатели движения элемента res из множества ресурсов Res, то из левого нижнего угла в правый верхний угол можно добраться двумя путями — через множество D (при этом элемент res $\in$ Res переходит в число τ (μ (Res))) и через множество Prod (res $\in$ Res переходит в ν (Π(res))). Условие коммутативности диаграммы означает, что оба эти пути равносильны: $\tau(\mu(\text{res})) = \tau(\Pi(\text{res}))$ для любого набора ресурсов res $\in$ Res. Именно это условие и выражает тот факт, что отображение τ моделирует отображение Π.

Появление коммутативной диаграммы в данном контексте является естественным, поскольку связано с формализацией основных понятий математического моделирования. Как известно, в основе понятия математической модели

лежит [22] понятие *гомоморфизма* — отображения моделируемого объекта в его модель, при котором связи между элементами или характеристиками объекта определенным образом соответствуют связям между элементами или характеристиками модели.

В чем смысл введения понятия агрегированной экономической технологии τ и чем оно отличается от понятия производственной функции? Агрегированная экономическая технология, если она существует, является полностью адекватной на избранном уровне описания математической моделью процесса. Именно эта функция служит объектом и целью аппроксимации, осуществляемой с помощью производственной функции. Таким образом, если τ — «идеальная» модель производственного процесса, то производственная функция — его грубое, приближенное описание.

Рассмотрим вопрос о существовании экономической технологии данного уровня агрегирования, т. е. разрешимости уравнения (1.4) относительно τ при заданных μ, ν, Π. Несмотря на то что в наблюдавшихся в момент t точках $x(t) = \mu(\mathrm{res}(t))$ функция τ всегда определена, на всем множестве D она может и не существовать! Причина состоит в том, что отображение μ, как правило, не взаимно однозначно. Это означает, что одну и ту же объемно-стоимостную оценку $x \in D$ могут получить два разных набора ресурсов $\mathrm{res} \neq \mathrm{res}' \in \mathrm{Res}$. При этом, чем выше уровень агрегирования (и соответственно ниже размерность пространства R^n, в котором лежит множество $D = \mu(\mathrm{Res})$), тем «большее» число наборов ресурсов получает одну и ту же оценку. Некоторые из этих эквивалентных по стоимости, но различных по структуре ресурсов могут перейти в совершенно различные по составу комплекты выпуска. Для того чтобы функция τ существовала, нужно, чтобы стоимости всех полученных таким образом и различных комплектов выпуска были равны. Это, конечно, бывает не всегда. Если бы отображение μ было однозначным в обе стороны и для него существовало бы обратное отображение μ^{-1}, то при любом уровне и способе агрегирования можно было бы гарантировать существование τ, полагая $\tau(x) = \nu(\Pi(\mu^{-1}))$.

Таким образом, мы видим, что условие существования экономической технологии при данном уровне и способе агрегирования предъявляет довольно сильные требования к согласованности систем показателей оценки ресурсов μ и оценки продукции ν. Ниже приводятся примеры различных ситуаций, когда от показателей μ, ν зависит существование агрегированной технологии.

Предположим временно, что производственный процесс П состоит в преобразовании неотрицательного r-мерного вектора $u = (u_1, \ldots, u_r) \in R^r$ в неотрицательный m-мерный вектор $w = (w_1, \ldots, w_m) \in R^m$ и описывается моделью линейного программирования:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} w_j \leqslant u_i, \quad i = 1, \ldots, r, \quad j = 1, \ldots, m;$$

$$w_j \geqslant 0;$$

$$\sum_{j=1}^{m} c_j w_j \to \max.$$

Интерпретация стандартная: $u_1, \ldots, u_r$ — запасы ресурсов каждого из r видов, $w_1, \ldots, w_m$ — количества изделий каждого из m видов, $a_{ij} \geqslant 0$ — нормы затрат i-го ресурса на единицу j-го продукта, c_j — цена единицы j-го изделия. Поскольку производство каждого из продуктов требует использования хотя бы одного из ресурсов, в матрице (a_{ij}) нет нулевых столбцов. Это гарантирует существование конечного оптимального решения при любом неотрицательном векторе $u \in R^r$. В случае, когда при данном u решение не единственно, зафиксируем какое-либо их них. Таким образом, $\Pi(u) = w^*$, где w^* — оптимальное решение задачи линейного программирования.

Рассмотрим некоторые конкретные ситуации, в которых удается обосновать или отвергнуть предположение о существовании агрегированной экономической технологии τ как функции от n переменных, удовлетворяющей условию (1.4).

1. Пусть ν: $R_+^m \to R_+$ — произвольная фиксированная линейная оценка объема продукции, причем $\nu(0) = 0$, μ: $R_+^r \to R_+^n$ — произвольная фиксированная линейная оценка ресурсов вида

$$\mu(u_1, \ldots, u_r) = (d_1 u_1 + \ldots + d_{r_1} u_{r_1}, \ldots, d_{r_{n-1}+1} u_{r_{n-1}+1} + \\ + \ldots + d_r u_r),$$

где $d_1, \ldots, d_r$ — неотрицательные константы. Предположим, что $a_{ij} > 0$ при $i = 1, \ldots, r$, $j = 1, \ldots, m$. Если при этих условиях $n < r$, то технологии τ не существует. Действительно, заметим, что если какая-либо из величин $u_1, \ldots, u_r$ равна нулю, то ввиду неравенства $a_{ij} > 0$ единственным допустимым, а следовательно, и оптимальным решением задачи линейного программирования будет нулевое. Поэтому при $u_k = 0$, $1 \leqslant k \leqslant r$, должно выполняться равенство $\tau(\mu(u_1, \ldots, u_r)) = 0$. Однако в этом случае функция τ рав-

на нулю тождественно, поскольку для каждого вектора $x = (d_1u_1 + \ldots + d_{r_1}u_{r_1}, \ldots, d_{r_{n-1}+1}u_{r_{n-1}+1} + \ldots + d_ru_r)$, где $u \in R^r_+$, можно подобрать такой вектор $u' \in R^r_+$, что $\mu(u') = \mu(u) = x$ и хотя бы одна из координат u' равна нулю. Это делается, например, так. Если в каждой из n групп коэффициентов $d_{r_{k-1}+1}, \ldots, d_{r_k}$ отличен от нуля только один коэффициент, то некоторые координаты вектора u не входят в запись вектора x и могут быть положены равными нулю. Если же существует группа $d_{r_{k-1}+1}, \ldots, d_{r_k}$, в которой отличны от нуля по крайней мере два коэффициента, скажем, $d_{r_{k-1}+1}$ и $d_{r_{k-1}+2}$, то можно положить $u'_{r_{k-1}+1} = 0$, $u'_{r_{k-1}+2} = (1/d_{r_{k-1}+2})(d_{r_{k-1}+1}u_{r_{k-1}+1} + d_{r_{k-1}+2}u_{r_{k-1}+2})$, оставив остальные координаты вектора u неизменными. Таким образом, функция $\tau \equiv 0$ на множестве $D = \mu(R^r_+)$, в то время как $\Pi \circ \nu \not\equiv 0$ при $c \neq 0$.

2. Предположим, что первые две строки матрицы (a_{ij}) пропорциональны: $a_{1j} = da_{2j}$, $j = 1, \ldots, m$. Пусть $n = r - 1$, ν: $R^n_+ \to R_+$ — произвольная заданная оценка объема выпуска, μ: $R^r_+ \to R^n_+$ — оценка ресурсов вида $\mu(u_1, \ldots, u_r) = (\min(u_1, du_2), u_3, \ldots, u_r)$. В этой ситуации n — факторная технология τ существует и может быть задана на множестве $D = \mu(R^r_+)$ следующим образом. Для $x = (\min(u_1, du_2, u_3, \ldots u_r)$ положим $\tau(x) = \nu(w^*)$, где w^* — решение задачи линейного программирования:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}w_j \leqslant x_i, \quad i = 1, 3, 4, \ldots, r, \quad j = 1, \ldots, m; \quad w_j \geqslant 0;$$

$$\sum_{j=1}^{m} c_j w_j \to \max.$$

Легко видеть, что так определенная функция τ удовлетворяет условию $\mu \circ \tau = \Pi \circ \nu$.

3. Заметим, что для любой матрицы (a_{ij}) при подходящих μ, ν существует однофакторная технология. В самом деле, обозначим через π^* решение задачи линейного программирования:

$$\sum_{i=1}^{r} \pi_i a_{ij} \geqslant c_j, \quad j = 1, \ldots, m, \quad i = 1, \ldots, r; \quad \pi_i \geqslant 0;$$

$$\sum_{i=1}^{r} u_i \pi_i \to \min,$$

являющейся двойственной для исходной модели, и положим

$$\mu(u) = \sum_{i=1}^{r} \pi_i^* u_i, \quad \nu(w) = \sum_{j=1}^{m} c_j w_j, \quad \tau(x) = x, \quad x \in R^1_+.$$

Тогда

$$(\mu \circ \tau)(u) = \sum_{i=1}^{r} \pi_i^* u_i = \sum_{j=1}^{m} c_j w_j = \nu(\Pi(u)).$$

Другие примеры ситуаций, в которых можно подтвердить или опровергнуть существование технологии τ, приведены в [30]. В общем случае вопрос о необходимых и достаточных условиях на параметры задачи линейного программирования, обеспечивающих при заданном n и линейных оценках ресурсов и продукции существование n-факторной технологии τ, пока открыт.

Из приведенных примеров становится ясным, что существование и свойства агрегированной экономической технологии τ зависят от свойств производственного процесса Π и системы показателей μ, ν. Если в конкретном случае, пользуясь информацией о характере производственного процесса и его показателей, можно теоретически доказать, что n-факторной технологии при данном n не существует, то от построения ПФ, аппроксимирующей функцию τ, следует, безусловно, отказаться, ибо отсутствует объект аппроксимации.

Наши знания о процессе ограничены, и, следовательно, ограничена информация о свойствах отображения τ. При анализе его свойств необходимо учитывать, что оно не тождественно самому производственному процессу и свойства процесса непосредственно на экономическую технологию не переносятся. Вот один из примеров. Обычно считается, что в нормальных условиях при увеличении количества включенных в производство ресурсов выпуск не уменьшается. Иными словами, если набор ресурсов res включает в себя набор ресурсов res′, то при неизменной технологии выпуск продукции prod = Π (res) включает в себя продукцию prod′ = Π (res′), полученную с помощью ресурсов res′. Однако даже при таком предположении возможны случаи, когда соответствующее технологическое отображение τ не будет возрастающим [30]. Наоборот, функция τ может быть неубывающей, в то время как процесс Π аналогичным свойством не обладает. Впервые, видимо, эти свойства были отмечены в [69].

Разница между производственной функцией и экономической технологией заключается в том, что значения ПФ в любой точке области ее определения мы можем вычислить с любой заданной точностью, а значения функции τ можно вычислить лишь в точках, соответствующих наблюдавшимся значениям ресурсов. Желательная область определения

производственной функции зависит от целей построения этой функции. Если необходимо знать значения функции во всех точках данной области $M_ц$ в пространстве R^n, то производственная функция должна быть вычислимой в области $M_ц$. В зависимости от того, предназначена ли строящаяся функция для кратко-, средне- или долгосрочных прогнозных расчетов или для ретроспективного анализа, предполагается ли ее включить в более широкую экономико-математическую модель или она будет использоваться автономно, ее желательная область определения может быть более или менее широкой. Наименьшим возможным вариантом является множество $M_{набл}$, состоящее из точек $x(t)$, отвечающих значениям ресурсов в t-й истекший период времени. Производственная функция $f_{набл}$, определенная на этом множестве, принимает в точке $x(t) \in M_{набл}$ значение $y(t)$ — объем выпуска за t-й период. Выражением этой функции является таблица значений, принимавшихся показателями ресурсов и выпуска в периоды $t = 1, \ldots, T$. Производственная функция $f_{набл}$ совпадает с ограничением отображения τ на множество $M_{набл}$. Другой полярный вариант возникает, если необходимо знать значения производственной функции во всех возможных точках множества D — области значений показателя ресурсов. Построение такой производственной функции представляет наибольшую сложность. Возможны разнообразные промежуточные варианты: так, желательная область определения производственной функции может включать, кроме наблюдавшихся, одну-единственную точку $x(T+1)$, характеризующую ожидаемые ресурсы года $T+1$.

1.2.6. Формальное определение производственной функции

К настоящему времени сложилось несколько различных толкований понятия производственной функции. Их можно распределить на два класса соответственно двум направлениям экономико-математических исследований — теоретическому и прикладному. Первое направление ставит своей целью в основном качественный анализ динамики экономических систем. Объектом моделирования здесь в каждом случае служит не конкретная система, а достаточно широкий класс таких систем. Поэтому проблема спецификации параметров практически не рассматривается, а при интерпретации производственной функции и ее характеристик используются лишь общеэкономические категории. По существу производственная функция отождествляется здесь

с агрегированной экономической технологией и носит абстрактный характер.

Главной задачей прикладного направления является разработка методов построения и использования моделей конкретных экономических систем — предприятий, объединений, отраслей и т. п. — на основании статистических, бухгалтерских и других данных. Для этого направления характерно широкое использование математико-статистических методов, и именно ему посвящены главы 1, 2 и 4 данной книги. В рамках этого направления в определении нуждается не абстрактное понятие производственной функции, а понятие «производственная функция данного объекта».

Основой для такого определения является понятие аппроксимационной схемы как четверки $AS = \langle a, E, \rho, V \rangle$, где a — объект аппроксимации; E — множество аппроксимирующих элементов; ρ — правило сравнения элементов по близости к a; V — метод отыскания наилучшего такого элемента. В п. 1.2.5 мы определили агрегированную экономическую технологию τ. Вместе со своей областью определения D она и служит объектом аппроксимации для производственной функции: $a = (D, \tau)$. Заметим, что технология τ является индивидуальной характеристикой каждой моделируемой системы. В качестве множества E берется класс всевозможных вычислимых функций $W = \{(M, f)\}$, где M — область определения математической функции f. Это множество не связано непосредственно с объектом моделирования, а отражает, скорее, технические возможности «субъекта моделирования» (например, одна и та же функция может быть вычислимой для исследователя, обладающего программой решения задачи нелинейного программирования большой размерности, и быть невычислимой в противном случае). В качестве отношения ρ в аппроксимационной схеме для производственной функции в принципе может фигурировать любое бинарное отношение на множестве вычислимых функций $W = \{(M, f)\}$, являющееся отношением квазипорядка (см. п. 1.4). Поскольку оно предназначено для сравнения, какая из двух пар функций, (M_1, f_1) или (M_2, f_2), лучше аппроксимирует функцию (D, τ), отношение ρ должно аккумулировать весьма обширную информацию об особенностях моделируемого объекта, его агрегированной экономической технологии τ, а также целях и условиях построения производственной функции *.

* Чтобы подчеркнуть, что при формулировке отношения ρ используются различные свойства и характеристики τ, например ее значения в заданных точках, отношение ρ записывается с индексом τ: ρ_τ.

Вычислительный процесс V должен обеспечивать эффективную процедуру поиска наилучшей аппроксимирующей функции. Обычно вместо поиска функций в бесконечномерном функциональном пространстве (это является слишком сложной на сегодняшний день задачей) используют параметрические классы функций. Каждая такая функция f вместе с областью определения M однозначно определяется конечным множеством параметров, так что выбор наилучшей функции сводится к выбору наилучшего вектора ее параметров. Поскольку в большинстве случаев близость τ и f задается с помощью числового критерия, вычисления сводятся к решению задачи нелинейного математического программирования.

В принципе в качестве метода вычислений V может быть взят любой достаточно эффективный алгоритм. Некоторые специфические черты задач, возникающих именно при оценке параметров производственных функций, приведены в п. 2.5. Выбор V определяется, с одной стороны, отношением ρ, с другой — арсеналом вычислительных средств, которыми располагает исследователь.

Теперь на основе проведенной конкретизации компонентов общей схемы аппроксимации мы можем сформулировать формальное определение производственной функции данного процесса. Пусть Π — производственный процесс, μ— система показателей запасов его ресурсов, ν — показатель объема выпуска, τ — агрегированная экономическая технология, т. е. отображение τ: μ (Res) $\to R'$, удовлетворяющее условию $\mu \circ \tau = \Pi \circ \nu$, W — класс вычислимых функций.

Производственной функцией процесса Π с показателями μ, ν в классе W называется функция f, полученная в результате решения аппроксимационной задачи

$$AS = \langle \tau,\ W,\ \rho_\tau,\ V \rangle,$$

где ρ_τ — отношение квазипорядка на множестве W; V — вычислительный алгоритм поиска элемента из множества W, являющегося экстремальным для отношения ρ_τ.

Производственная функция процесса при заданных μ, ν, ρ, V может не существовать (например, если отношение ρ_τ не имеет экстремальных элементов) или быть не единственной (если таких элементов несколько и метод V позволяет их отыскать). Не имеет смысла говорить о производственной функции также в случае, когда уравнение $\mu \circ \tau = \Pi \circ \nu$ при заданных μ, Π и ν не имеет решения относительно τ.

Если все компоненты определения производственной функции указаны явно, то для того, чтобы убедиться, что

представленная функция является производственной функцией данного процесса, достаточно проверить, что она служит результатом вычислительного алгоритма V при известных исходных данных.

Согласно данному определению производственная функция является результатом аппроксимации агрегированной экономической технологии τ. В свою очередь, пара (D, τ) является точной математической моделью производственного процесса П. Таким образом, ПФ расположена как бы «на втором этаже» по отношению к экономической реальности. Строго говоря, объектом, который она моделирует, является не сам производственный процесс П, а его модель τ. Однако отношение моделирования, по-видимому, транзитивно [22], что и дает основания говорить о ПФ как о модели реальной экономической системы.

Классическая схема построения ПФ с помощью оценок коэффициентов состоит из двух этапов. Сначала на основе качественного анализа объекта моделирования и его целей из списка классов математических функций выбирается параметрический класс $F = \{f(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_k)\}$, все элементы которого как функции от $x_1, \ldots, x_n$ обладают нужными характеристиками поведения (при этом предполагается, что все функции, входящие в F, вычислимы). Таким образом устанавливается «вид производственной функции». Затем функция данного «вида» $y = f(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_k)$ рассматривается как регрессионное уравнение, оценки параметров $a_1, \ldots, a_k$ которого находятся из условия минимизации суммы квадратов отклонений значений функции $f(x, a)$ в наблюдавшихся точках $x(t)$, $t = 1, \ldots, T$, от наблюдавшихся значений $y(t)$, $t = 1, \ldots, T$:

$$\sum_{t=1}^{T} (y(t) - f(x(t), a))^2 \to \min. \qquad (1.5)$$

В случае, когда функция f линейна по параметрам или сводится к такой, отыскание значений $\widehat{a}$, минимизирующих сумму квадратов отклонений (1.5), сводится к решению системы линейных уравнений.

Покажем, что эта схема полностью укладывается в приведенное выше определение производственной функции. В общей схеме аппроксимационной задачи $AS = \langle a, E, \rho, V \rangle$ отношение ρ является отношением квазипорядка. Значит, оно представимо как пересечение $\varphi \cap \psi$ некоторого отношения принадлежности φ и отношения предпорядка ψ на E (бинарное отношение $\varphi \subset E \times E$ называется *отноше-*

нием принадлежности, если $\varphi = E' \times E'$, где E' — некоторое подмножество в E; бинарное отношение $\psi \subset E \times E$ называется *отношением предпорядка*, если оно транзитивно и $(e, e) \in \psi$ для любого $e \in E$). Отношение ρ является ограничением некоторого отношения предпорядка на подмножество $E' \subset E$ [30, 55]. Экстремальный элемент $\widehat{a} = \operatorname{extr}_E \rho$ всегда принадлежит множеству E'. Поэтому его поиск можно осуществлять в два этапа: сначала множество E сужается до некоторого (однозначно определенного отношением ρ) множества E', а затем экстремальный элемент отыскивается уже внутри множества E'. В применении к построению производственной функции данного процесса это означает, что отношение ρ_τ может быть также задано как ограничение предпорядка на некоторое подмножество F класса всех вычислимых функций W, $\rho_\tau = \varphi_\tau \cap \psi_\tau$. Производственная функция, аппроксимирующая отображение τ, отыскивается непосредственно в этом классе.

Информация об экономико-технологической функции τ используется, во-первых, при выборе класса функций F и отношения $\varphi_\tau = F \times F$ (как правило, при этом используются качественные данные) и при формировании отношения ψ_τ (значения τ в точках множества $D_{\text{набл}}$). При этом в классической схеме из двух функций $f_1(x) = f(x, a^1) \in F$ и $f_2 = f(x, a^2) \in F$ ближе к τ считается та, у которой сумма квадратов отклонений значений от наблюдавшихся меньше. Это правило задает отношение ψ_τ на множестве всех вычислимых функций, у которых естественная область определения содержит положительный ортант:

$$\psi_\tau = \left\{ (f_1, f_2) \in W \times W \;\middle|\; \sum_{t=1}^{T} (f_1(x(t)) - y(t))^2 \leqslant \right.$$
$$\left. \leqslant \sum_{t=1}^{T} (f_2(x(t)) - y(t))^2 \right\};$$

$$\varphi_\tau = \{(f_1, f_2) \in W \times W \mid f_1 \in F, \quad f_2 \in F\}; \quad \rho_\tau = \varphi_\tau \cap \psi_\tau.$$

1.3. ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

1.3.1. Характеристики производственных процессов

Построение, анализ и использование производственной функции основаны на отражении в ее характеристиках и параметрах характерных особенностей производства. По-

скольку производственная функция строится как аппроксимация экономической технологии, характеристики последней служат промежуточным звеном между характеристиками моделируемого процесса и производственной функции. При этом информация о данном производственном процессе, выраженная большей частью в форме словесного описания, должна быть переведена на язык описания математических свойств технологической функции, а те, в свою очередь, в совокупность количественных критериев, которым должны удовлетворять характеристики производственной функции.

Рассмотрим показатели и характеристики производственного процесса, его агрегированной экономической технологии и производственной функции.

Основными элементами процесса производства на предприятии, в объединении, отрасли являются: выпускаемая продукция, затрачиваемые ресурсы, а также технология и организация производственного процесса. Каждый из этих элементов характеризуется показателями объема, структуры (номенклатуры) и качества (уровня).

Основой показателей структуры выпуска продукции в настоящее время является Общесоюзный классификатор промышленной и сельскохозяйственной продукции, в котором определена и закодирована номенклатура всех видов выпускаемой продукции. Объемные показатели выпуска строятся на основе стоимостных нормативов на единицу каждого вида продукции согласно ОКП — цен, надбавок (скидок) и нормативов чистой продукции (НЧП). Для каждой отрасли существуют также укрупненные номенклатурные перечни, используемые на различных стадиях планирования.

Аналогичным образом строятся структурные и объемные показатели материальных ресурсов (средств и предметов труда). Для трудовых ресурсов основным номенклатурным показателем служит перечень профессионально-квалификационных групп и категорий работников. Объемные показатели трудовых ресурсов определяются либо путем сложения численности всех видов работников, либо путем применения различных коэффициентов приведения. В качестве таких коэффициентов используют среднюю заработную плату, характеристики производительности труда и др. (см., например, [53]).

Качественную характеристику средств труда дают показатели *технического уровня средств труда*. К ним относятся: соотношение активной и пассивной частей основных фондов, возрастная структура оборудования, удельный вес прогрессивного оборудования. Одной из характеристик

уровня средств труда является удельный вес уникального оборудования, не допускающего замену другими имеющимися в составе парка видами оборудования.

Качество трудовых ресурсов определяется по удельному весу работников высшей квалификации в общей численности, а также их заработной платы в общем фонде заработной платы. Важной характеристикой качества труда является уровень *технической оснащенности труда*, которая отражается в показателях фондо-, энерго- и электровооруженности труда, размерах оборотных средств, приходящихся на одного работающего.

Уровень технологии и организации производства оценивается показателями степени специализации и кооперации производства, коэффициентами сменности и использования рабочего времени, удельным весом прогрессивных технологических процессов и форм организации труда. В качестве частных показателей для машиностроительных предприятий используются коэффициенты параллельности (совмещения) производственного процесса, коэффициенты рациональности перемещения (движения) предметов труда и т. д. [57].

Технический уровень средств труда, уровень технической оснащенности труда и уровень технологии и организации производства в совокупности характеризуют *технический уровень производства*.

Кроме показателей выпуска продукции, ресурсов, технологии и организации производства для описания производственных процессов используются показатели эффективности. Они строятся путем сопоставления показателей объема, структуры и качества выпуска с аналогичными показателями ресурсов. Это сопоставление обычно делается с помощью вычисления отношений объема выпуска к размерам ресурсов (производство продукции на 1 руб. затрат, производительность труда, фондоотдача, производство продукции на 1 руб. оборотных средств) или разностей между показателями выпуска продукции и затрат ресурсов (прибыль).

Перечисленные показатели характеризуют производство за один период — год, квартал, месяц. Для описания динамики процесса используют приростные и темповые показатели. К приростным показателям относятся: абсолютный прирост выпуска продукции; прирост выпуска на единицу прироста основных фондов; прирост выпуска на единицу прироста оборотных средств; прирост выпуска на единицу прироста численности работающих. Среди темповых наиболее часто встречаются показатели: темп роста товарной продукции; темп роста производительности труда, фондоотда-

чи и отдачи оборотных средств; темп роста выпуска на единицу прироста основных фондов, оборотных средств и численности работающих; доля прироста выпуска продукции за счет роста производительности труда. В планировании и анализе деятельности хозяйственных систем за ряд лет используются также приросты или темпы изменения темпов роста показателей (например, рассчитывают, на сколько пунктов выросли или снизились ежегодные темпы роста выпуска).

Важная информация об особенностях конкретного производственного процесса содержится в системе норм и нормативов затрат ресурсов. Они подразделяются на нормы расхода материальных ресурсов, нормы трудоемкости видов продукции и нормы и нормативы структуры оборотных средств [15]. Сопоставление этих норм между собой определяет нормативные соотношения между ресурсами, характерные для данного процесса.

Рассматривая множество характеристик производственного процесса, мы можем разбить их на три группы. В первую группу включаются первичные характеристики процесса, т. е. натуральные показатели выпуска и затрат ресурсов за один период, а также структурные, объемные и качественные показатели, получаемые из первичных с помощью арифметических действий с использованием норм и нормативов.

Ко второй группе отнесем приростные и темповые показатели динамики процесса, которые вычисляются на основе показателей первой группы. Наконец, в третью группу войдут показатели, характеризующие приросты и темпы роста показателей второй группы (например, годовой прирост темпов роста производительности труда).

Смысл построения ПФ, так же как и любой другой математической модели, состоит в том, чтобы, строя ее по одним (известным) характеристикам процесса, вычислить на ее основе другие, неизвестные характеристики. Важно, однако, иметь в виду следующее: данная характеристика процесса может быть определена с помощью производственной функции лишь в том случае, когда, во-первых, она допускает выражение через показатели и параметры, входящие в ПФ, и, во-вторых, при построении производственной функции в явном виде учитываются характеристики из той же группы, к которой принадлежит данная характеристика. Например, ПФ, которая строилась из условия приближения вычисленных значений объема выпуска к фактическим, при определенных предположениях может быть использована для прогнозирования выпуска при заданных факторах в будущем периоде, однако вряд ли ее можно использовать для прогно-

зирования такой характеристики процесса, как темп роста производительности труда. Для этой цели необходима другая производственная функция, при построении которой критерием была не только близость фактических и вычисленных объемов выпуска за прошедшие годы, но и близость фактических и вычисленных темпов изменения производительности труда. Поэтому при построении производственной функции как обобщающей модели производственного процесса следует стремиться к тому, чтобы вся имеющаяся информация о характеристиках и особенностях моделируемого процесса в максимальной степени была учтена (см. п. 2.4.1).

1.3.2. Свойства и характеристики агрегированной технологии

Агрегированная экономическая технология τ представляет собой функцию, являющуюся «идеальной» моделью производственного процесса. Эта функция служит объектом аппроксимации, осуществляемой посредством производственной функции f. При этом технология τ не известна полностью исследователю, он не может вычислить ее значения во всех точках области определения; известными являются лишь некоторые ее характеристики и свойства, восстанавливаемые по характеристикам производственного процесса. Аппроксимация, следовательно, ведется путем сопоставления известных характеристик и свойств технологии с соответствующими характеристиками пробной производственной функции.

Поскольку технология τ является функцией, определенной на множестве D, ее характеристики относятся либо к конфигурации и размерности области D, либо к поведению самой функции τ.

Среди характеристик области D отметим следующие:

1) размерность пространства, в котором лежит множество D, т. е. число n аргументов функции $\tau = \tau(x_1, \ldots, x_n)$;

2) размерность самой области D в пространстве $R^n : d = \dim D$, т. е. максимальное число независимых переменных среди $x_1, \ldots, x_n$. (Если существует такая ненулевая функция $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, что в любой допустимой точке $(x_1, \ldots, x_n) \in D$ имеет место равенство $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$, то $\dim D \leqslant n - 1$; это означает, что избранная система показателя ресурсов избыточна, и их число можно при описании процесса сократить);

3) границы множества D в пространстве ресурсов

$$m_i = \inf_{x \in D} x_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

$$M_i = \sup_{x \in D} x_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

и в пространстве соотношений между ресурсами

$$r_{ij} = \inf_{x \in D} \frac{x_i}{x_j}$$

$$R_{ij} = \sup_{x \in D} \frac{x_i}{x_j};$$

4) для качественного анализа конфигурации множества D иногда используются также понятия связности и выпуклости. Множество D называется *связным*, если любые две его точки можно соединить какой-либо кривой, целиком лежащей в множестве D. Множество D называется *выпуклым*, если вместе с каждыми двумя точками x', $x'' \in D$ оно содержит все точки соединяющего x' и x'' отрезка.

Дополнительные свойства и характеристики, отражающие конфигурацию области определения технологии, приведены в п. 2.3.1.

По существу свойства множества D определяются выбором системы показателей ресурсов процесса, т. е. отображением μ, и диапазонами возможных в тех или иных условиях (допустимых) значений показателей ресурсов.

Перечислим наиболее важные характеристики и свойства, определяющие поведение самой функции τ на множестве D:

1) характер изменения функции τ при увеличении (уменьшении) i-го ресурса на определенное количество единиц или процентов;

2) характер изменения функции τ при одновременном увеличении (уменьшении) всех ресурсов в определенное количество раз или на определенное количество процентов;

3) характер изменения функции «отдачи» i-го ресурса τ/x_i при увеличении (уменьшении) j-го ресурса на определенное количество единиц или процентов;

4) характер изменения функции $\dfrac{\tau}{c_1x_1 + \ldots + c_nx_n}$, выражающей «отдачу» обобщенного фактора $c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$ ($c_1, \ldots, c_n$ — коэффициенты формирования обобщенного фактора из факторов $x_1, \ldots, x_n$) при увеличении (уменьшении) ресурсов на определенное количество единиц или процентов. В качестве такого обобщенного фактора чаще всего рассматривается себестоимость продукции;

5) выпуклость или вогнутость функции τ (функция $\tau(x)$ называется *выпуклой*, если ее область определения D является выпуклым множеством, и для любых точек $x', x'' \in D$ и любого числа λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, имеет место неравенство $\tau(\lambda x' + (1-\lambda)x'') \leqslant \lambda\tau(x') + (1-\lambda)\tau(x'')$; функция $\tau(x)$ *вогнута*, если функция $-\tau(x)$ является выпуклой);

6) возможность реализации определенного значения функции τ при различных комбинациях ресурсов.

Для количественного описания поведения функции τ используются следующие группы показателей:

а) нижние и (или) верхние границы изменения значений $\tau(x)$ в заданных областях $X_1, \ldots, X_J$ пространства ресурсов:

$$b_j \leqslant \tau(x) \leqslant B_j, \quad x \in X_j, \; j = 1, \ldots, J,$$

в частности значения $\tau(x)$ в наблюдавшихся точках:

$$y(t) = \tau(x(t)), \; t = 1, \ldots, T;$$

б) нижние и (или) верхние границы изменения приростов и темпов роста функции τ в заданных областях $X_1, \ldots, X_J$ изменения ресурсов:

$$b_j \leqslant \tau(x) - \tau(x') \leqslant B_j, \quad x, x' \in X_j, \; j = 1, \ldots, J;$$

$$b_j \leqslant \frac{\tau(x) - \tau(x')}{\tau(x')} \leqslant B_j, \; x, x' \in X_j, \; j = 1, \ldots, J,$$

в частности значения прироста функции τ при увеличении i-го ресурса на единицу:

$$b_i \leqslant \tau(x_1, \ldots, x_i + 1, \ldots, x_n) - \tau(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \leqslant B_i,$$

а также значения приростов и темпов роста функции τ в наблюдавшихся точках:

$$\Delta_{t,t'} y = \tau(x(t)) - \tau(x(t')),$$

$$\bar{\Delta}_{t,t'} y = \frac{\tau(x(t)) - \tau(x(t'))}{\tau(x(t'))}, \; t, t' = 1, \ldots, T, \; t > t';$$

в) нижние и (или) верхние границы изменения индекса роста функции τ при одновременном увеличении всех ресурсов в $\lambda > 0$ раз:

$$b_\lambda \leqslant \tau(\lambda x)/\tau(x) \leqslant B_\lambda.$$

Для количественного описания таких свойств функции, как выпуклость или вогнутость, можно использовать верхние и нижние границы изменения разности между средневзвешенным значением функции в двух точках x^1 и x^2 и ее значением в средневзвешенной точке

$$b_\lambda \leqslant \tau(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) - \lambda\tau(x^1) - (1-\lambda)\tau(x^2) \leqslant B_\lambda.$$

Аналогичные показатели строятся и для функций $\frac{\tau}{x_i}$, $\frac{\tau}{c_1x_1 + \ldots + c_nx_n}$, выражающих «отдачу» соответственно i-го и обобщенного ресурсов.

Поскольку в конкретной ситуации значения функции τ вычислимы не во всей области $D = \mu$ (Res), а лишь в небольшой ее части, те или иные показатели, характеризующие τ, могут также оказаться невычислимыми. В этих случаях рассматривают ограничения этих показателей на область их вычислимости.

Совокупность количественных характеристик агрегированной экономической технологии, так же как и систему показателей производственного процесса, можно разбить на три группы. К первой группе отнесем нижние и верхние границы значений функций τ, $\frac{\tau}{x_i}$, $\frac{\tau}{c_1x_1 + \ldots + c_nx_n}$. Приростные и темповые характеристики этих функций — ко второй группе; показатели, характеризующие выпуклость (вогнутость) фукции τ, по существу полученные путем арифметических операций с приростами,— к третьей. Эти группы соответствуют классификации характеристик производственного процесса.

1.3.3. Система характеристик производственной функции

Производственная функция $\widehat{f}$ данного экономического объекта является результатом решения задачи аппроксимации агрегированной экономической технологии τ. В процессе решения этой задачи для каждой пробной пары (M, f) ее характеристики и свойства сравниваются с известными характеристиками и свойствами пары (D, τ), а также сопоставляются с целями построения модели. Следовательно, система характеристик производственной функции должна включать, во-первых, характеристики, отражающие свойства области определения M, во-вторых, характеристики, отражающие свойства функции τ, и, наконец, показатели расхождения между характеристиками пар (M, f) и (D, τ). Кроме того, в составе этой системы следует предусмотреть такие характеристики, которые допускают интерпретацию в качестве значений известных экономических характеристик производственного процесса.

Отсюда вытекает, что система характеристик производственной функции должна состоять из следующих трех групп:

А — характеристики области определения M функции f;

Б — характеристики самой функции f, отражающие свойства технологии τ и допускающие интерпретацию в качестве характеристик производственного процесса;

В — характеристики качества аппроксимации функцией f технологии τ.

Поскольку под производственной функцией в общем случае мы понимаем пару (M, f), то собственно функцию f будем иногда называть *производственной поверхностью* (локализованной на области M).

Характеристики группы А предназначены для описания конфигурации и расположения множества M в пространстве аргументов производственной функции и потому аналогичны соответствующим характеристикам множества D:

1) число аргументов производственной функции n;

2) размерность области определения $d = \dim M$;

3) границы множества M в пространстве факторов $\inf\limits_{x \in M} x_i$, $\sup\limits_{x \in M} x_i$ и соотношений факторов

$$\sup_{x \in M} \frac{x_i}{x_j}, \quad \inf_{x \in M} \frac{x_i}{x_j}.$$

Характеристики группы Б формулируются в предположении, что производственная функция дифференцируема до второго порядка включительно. Это предположение обосновывается следующими соображениями. С одной стороны, оно находится в русле общего направления теории производственных функций: применяя производственную функцию, исследователь переходит от дискретных («разорванных») эмпирических значений показателей реального процесса к непрерывному множеству допустимых вариантов значений показателей производственного процесса. Переход от непрерывного представления деятельности системы к дифференцируемым функциям является естественным следующим шагом после перехода от дискретного анализа к непрерывному. С практической же точки зрения применение дифференцируемых функций оправдано наличием мощного арсенала локального исследования функций средствами дифференциального исчисления *. Большинство из

* В последнее время в качестве производственных стали применяться сплайн-функции (см., например, [52]), где требуется лишь кусочная непрерывная дифференцируемость. В основе таких функций, однако, лежат «классические» дифференцируемые производственные функции.

применяемых в настоящее время функций либо дифференцируемы (реже — кусочно-дифференцируемы), либо получаются из дифференцируемых в результате предельного перехода по параметрам.

Аналогичным образом оправдывается применение в качестве областей определения M связных подмножеств неотрицательной части n-мерного пространства.

Характеристики производственной функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, относящиеся к группе Б, представляют собой, в свою очередь, функции от переменных $x_1, \ldots, x_n$. Если характеристическая функция использует значения первых или вторых частных производных функций f, она называется соответственно *характеристикой первого или второго порядка*. Характеристики, использующие только значения функции f, называются *характеристиками нулевого порядка*. Такая группировка характеристик производственной функции соответствует делению на три группы показателей производственного процесса и агрегированной технологии τ.

Все характеристики производственной функции f для единообразия будем обозначать одной и той же буквой χ с одним верхним и двумя или тремя нижними индексами. Верхний индекс l указывает на порядок характеристики, $0 \leqslant l \leqslant 2$, первый нижний — на вид характеристики, следующие — на принадлежность к моменту времени или связь с одной из переменных. Множество характеристик производственной функции представляет собой систему операторов* на множестве дифференцируемых функций. Смысл использования дифференциальных характеристик производственной функции состоит в том, что значение такой характеристики в фиксированной точке x пространства аргументов определяет характер поведения функции не только в данной точке, но и в ее окрестности. Кроме того, во многих случаях те или иные дифференциальные характеристики функции являются константами. Это позволяет описывать и сравнивать между собой важные классы функций с помощью системы постоянных параметров.

Для каждой из приводимых ниже характеристик приведем ее интерпретацию через свойства производственного процесса (точнее, его агрегированной технологии).

Характеристики нулевого порядка.

1. $\chi^0_{1t}(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1(t), \ldots, x_n(t)), \; t = 1, \ldots, T.$

---

* *Оператором* на множестве называется отображение данного множества в себя.

Каждой функции f сопоставляются ее значения в наблюдавшихся точках $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$.

2. $\chi^0_{2i}(x_1, \ldots x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) = \lim\limits_{x_i \to \infty} f(x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, n$.

Данная характеристика отражает наличие у функции асимптот и показывает, каков максимальный объем выпуска при неограниченном возрастании одного из факторов (если $\chi^0_{2i} = \infty$, объем выпуска неограниченно возрастает).

3. $\chi^0_{3i}(x_1, \ldots, x_n) = \dfrac{f(x_1, \ldots, x_n)}{x_i}$, $i = 1, \ldots, n$.

Значение χ^0_{3i} в точке $x = (x_1, \ldots, x_n)$ показывает среднюю отдачу каждой единицы i-го ресурса при условии использования ресурсов в количествах $x_1, \ldots, x_n$.

4. $\chi^0_4(x_1, \ldots, x_n, c_1, \ldots, c_n) = \dfrac{f(x_1, \ldots, x_n)}{c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n}$.

Данная характеристика показывает среднюю отдачу «обобщенного» ресурса $c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$, где $c_1, \ldots, c_n$ — коэффициенты, с которыми ресурсы $x_1, \ldots, x_n$ входят в выражение для «обобщенного» ресурса (например, себестоимости).

5. $\chi^0_5(x_1, \ldots, x_n, c_1, \ldots, c_n) = f(x_1, \ldots, x_n) - c_1x_1 - \ldots - c_nx_n$.

В зависимости от коэффициентов $c_1, \ldots, c_n$ величина χ^0_5 выражает разность между объемом выпуска и различными видами затрат на производство. Если $c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$ — общая сумма издержек производства, то χ^0_5 представляет собой прибыль.

Характеристики первого порядка.

6. $\chi^1_{1i}(x_1, \ldots, x_n) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, n$.

Данная характеристика называется *предельной производительностью* i-го ресурса и приближенно показывает, насколько изменится объем выпуска при изменении i-го ресурса на единицу (при условии, что в производстве участвуют ресурсы в размерах $x_1, \ldots, x_n$).

7. $\chi^1_{2i}(x_i, \ldots, x_n) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) \Big/ \dfrac{f(x_1, \ldots, x_n)}{x_i}$, $i = 1, \ldots, n$.

Эта характеристика называется *эластичностью выпуска по i-му ресурсу*. Ее значение в точке $x_1, \ldots, x_n$ приближенно показывает, на сколько пунктов (процентов) изменится объем выпуска при изменении размера i-го ресурса на один

пункт (процент), если в производстве участвуют ресурсы в размерах $x_1, \ldots, x_n$.

8. $\chi^1_{3ij}(x_1,\ldots, x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\ldots, x_n) \Big/ \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1,\ldots, x_n), i, j = 1,\ldots, n, \ i \neq j.$

Характеристика χ^1_{3ij} носит название *предельной нормы замены i-го ресурса j-м ресурсом*. Она выражает соотношение между изменением объема выпуска, вызванным изменением на единицу i-го ресурса, и таким же изменением, связанным с вариацией на единицу j-го ресурса (при условии, что исходным значением ресурсов в обоих случаях является точка $x_1, \ldots, x_n$). Другая интерпретация функции предельной нормы замены состоит в следующем. Значение χ^1_{3ij} в точке $x = (x_1, \ldots, x_n)$ определяет приближенно, на сколько нужно увеличить ресурс j, чтобы скомпенсировать уменьшение ресурса i на единицу при условии, что остальные ресурсы не изменялись, а исходные значения ресурсов составляли $x_1,\ldots, x_n$ (обоснование см. в п. 1.3.4).

9. $\chi^1_4(x_1,\ldots, x_n, \lambda) = \frac{\partial f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)}{\partial \lambda} \Big/ \frac{f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)}{\lambda}.$

Данная характеристика называется *эластичностью выпуска по масштабу* производства. Она показывает, насколько функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ близка к однородной, причем эта близость рассматривается локально — в окрестности точки $x_1, \ldots, x_n$. Функция $f(x)$ тогда и только тогда будет однородной функцией степени однородности γ, когда χ^1_4 тождественно по переменным $x_1, \ldots, x_n, \lambda$ равна константе γ. Значение χ^1_4 в точке $x_1, \ldots, x_n, \lambda$ интерпретируется следующим образом. Обозначим через $\mathrm{ind}_\lambda f(x)$ величину $\frac{f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)}{f(x_1, \ldots, x_n)}$ — индекс роста объема выпуска при увеличении размеров всех ресурсов в λ раз. Тогда $\chi^1_4(x_1, \ldots, x_n, \lambda)$ показывает, на сколько пунктов (процентов) изменится этот индекс при изменении λ на один пункт (процент) при условии, что исходной точкой для изменения ресурсов являлись значения $x_1, \ldots, x_n$. Для однородных функций величина χ^1_4 допускает также следующую интерпретацию: если все ресурсы увеличиваются на один процент, то объем выпуска увеличится приблизительно на χ^1_4 процентов.

Характеристики второго порядка.

10. $\chi^2_{1ij}(x_1,\ldots, x_n) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1,\ldots, x_n), \ i, j = 1,\ldots, n.$

Значение функции χ^2_{1ij} характеризует динамику изменения предельной производительности j-го ресурса при изменении количества i-го ресурса на единицу (начальной считается точка $x_1, \ldots, x_n$).

Ряд других характеристик второго порядка рассмотрен в п. 1.3.5 и 1.3.6.

Перечисленные характеристики не являются независимыми. Требования, налагаемые на одни характеристики, ограничивают возможности изменения других. Рассмотрим основные соотношения между ними.

Из определений показателей χ^1_1, χ^2_2, χ^0_3 сразу вытекает, что

$$\chi^1_{2i} = \chi^1_{1i}/\chi^0_{3i}, \quad i = 1, \ldots, n; \tag{1.6}$$

$$\chi^1_{3ij} = \chi^1_i/\chi^1_j, \quad i, j = 1, \ldots, n. \tag{1.7}$$

Ввиду известных свойств повторного дифференцирования

$$\chi^2_{1ij} = \frac{\partial \chi^1_{1i}}{\partial x_j} = \frac{\partial \chi^1_{1j}}{\partial x_i} = \chi^2_{1ji}, \quad i, j = 1, \ldots, n. \tag{1.8}$$

Перейдем к характеристикам производственной функции, отражающим качество аппроксимации. Характеристики группы В строятся на основе сопоставления характеристик производственной функции со свойствами и характеристиками агрегированной технологии. Качество аппроксимации определяется мерой отклонений значений характеристики χ^l_{ijk} от данных, характеризующих соответствующее свойство технологии.

Основными являются следующие показатели отклонений:

1. $\varkappa^0_{1t} = |\chi^0_{1t} - \tau(x(t))|, \quad t = 1, \ldots, T.$

Характеристика χ^0_{1t} выражает абсолютную величину отклонения значения производственной функции в t-й наблюдаемой точке от t-го наблюдавшегося объема выпуска.

2. $\varkappa^0_{2j} = \frac{1}{2}(\max\limits_{x \in M} f(x) - B + |\max\limits_{x \in M} f(x) - B|), \quad j = 1, \ldots, J.$

В этом выражении M — подмножество области определения производственной функции и технологии, для которого известна верхняя граница объема выпуска $B = \max\limits_{x \in M} \tau(x)$, J — количество этих подмножеств. Величина $\varkappa^0_{2j}$ равна нулю, если выполнено условие $f(x) \leqslant B$ при $x \in M$. Если же это условие нарушено, то $\varkappa^0_{2j} = \max\limits_{x \in M} (f(x) -$

$-B$). Таким образом, $\varkappa_{2j}^{2}$ принимает значение от 0 до $+\infty$, в зависимости от степени нарушения условия $f(x) \leqslant B_j$, $x \in M_j$, причем, чем выше эта степень, тем больше $\varkappa_{2j}^{0}$. Минимизация $\varkappa_{2j}^{0}$ является одним из критериев аппроксимации технологии при наличии информации о технологии в виде верхних границ функции τ.

$$3.\ \varkappa_{3j}^{0} = \frac{1}{2}\left(b_j - \min_{x \in M_j} f(x) + \left| b_j - \min_{x \in M_j} f(x) \right|\right),\ j = 1, \ldots, J. \tag{1.9}$$

Предполагается, что на множествах M_j, $j = 1, \ldots, J$, известны нижние границы объема выпуска $b_j = \min\limits_{x \in M_j} \tau(x)$.

Очевидно, $\varkappa_{3j}^{0} = 0$, если $f(x) \geqslant b_j$ при $x_j \in M$ и $\varkappa_{3j}^{0} = \min\limits_{x \in M_j} (b_j - f(x))$, если это условие нарушается.

Таким образом, минимизация критериев $\varkappa_{2j}^{0}$, $\varkappa_{3j}^{0}$ обеспечивает выполнение условий

$$b_j \leqslant f(x) \leqslant B_j \text{ при } x \in M_j,\ j = 1, \ldots, J. \tag{1.10}$$

$$4.\ \varkappa_{4ij}^{0} = \frac{1}{2}\left(\max_{x \in M_{ij}} \chi_{3i}^{0} - B_{ij} + \left| \max_{x \in M_{ij}} \chi_{3i}^{0} - B_{ij} \right|\right),\ i = 1, \ldots, I,$$

$$j = 1, \ldots, J. \tag{1.11}$$

$$5.\ \varkappa_{5ij}^{0} = \frac{1}{2}\left(b_{ij} - \min_{x \in M_{ij}} \chi_{3i}^{0} + \left| b_{ij} - \min_{x \in M_{ij}} \chi_{3i}^{0} \right|\right),\ i = 1, \ldots, I,$$

$$j = 1, \ldots, J. \tag{1.12}$$

Характеристики $\varkappa_{4ij}^{0}$, $\varkappa_{5ij}^{0}$, также принимающие значения от 0 до $+\infty$, определяют степень нарушения условий

$$b_{ij} \leqslant \chi_{3i}^{0}(x) \leqslant B_{ij} \text{ при } x \in M_{ij}. \tag{1.13}$$

Так формируются условия на нижние и верхние границы средней производительности i-го ресурса.

Аналогичным образом строятся показатели нарушения ограничений типа (1.9) для других характеристик производственной функции.

$$6.\ \varkappa_{6ij}^{1} = \frac{1}{2}\left(\max_{x \in M_{ij}} \chi_{1i}^{1} - B_{ij} + \left| \max_{x \in M_{ij}} \chi_{1i}^{1} - B_{ij} \right|\right). \tag{1.14}$$

$$7.\ \varkappa_{7ij}^{1} = \frac{1}{2}\left(b_{ij} - \min_{x \in M_{ij}} \chi_{1i}^{1} + \left| b_{ij} - \min_{x \in M_{ij}} \chi_{1i}^{1} \right|\right). \tag{1.15}$$

1.3.4. Неоклассические производственные функции

В зависимости от характера производственного процесса, целей и средств моделирования в качестве производственных могут использоваться неотрицательные функции весьма разнообразного вида. Однако наиболее часто для моделирования процесса производства используются функции $y = f(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющие следующим условиям (так называемым *неоклассическим критериям*): 1) функция не убывает по каждому аргументу; 2) является однородной и 3) является вогнутой.

Напомним, что функция $y = f(x)$, определенная на множестве M, называется *однородной степени* γ, если а) для любой точки x из M и любого $\lambda > 0$ точка λx принадлежит M и б) существует такое число γ, что $f(\lambda x) = \lambda^\gamma f(x)$ при любых $x \in M$, $\lambda > 0$. (1.16)

Функция $y = f(x)$ называется *вогнутой*, если для любых точек x', x'' из M и любого λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, точка $\lambda x' + (1 - \lambda) x''$ принадлежит M и

$$f(\lambda x' + (1 - \lambda) x'') \geqslant \lambda f(x') + (1 - \lambda) f(x''). \quad (1.17)$$

Неотрицательные функции, удовлетворяющие условиям 1) — 3), называются *неоклассическими функциями* [13, 27]. Будем называть неоклассическую функцию $y = f(x)$ *классической*, если ее степень однородности равна: $\gamma = 1$.

Однородная функция степени 1 называется также *линейно-однородной*. Понятие однородной функции оказывается весьма полезным в теории производственных функций, поскольку отражает один из наиболее простых и характерных случаев зависимости объема выпуска от динамики масштабов производства. Переход от точки $x \in M$ к точке $\lambda x \in M$ соответствует пропорциональному увеличению всех ресурсов $x_1, \ldots, x_n$ в λ раз. Иными словами, индексы роста всех ресурсов равны λ. Если производство описывается однородной функцией, то индекс роста объема выпуска в этом случае также будет равен λ. Таким образом, если производственный процесс описывается линейно-однородной производственной функцией, то из условия

$$\operatorname{ind} x_1 = \ldots = \operatorname{ind} x_n = \lambda \quad (1.18)$$

вытекает, что

$$\operatorname{ind} y = \lambda. \quad (1.19)$$

Для производственной функции произвольной степени однородности из условия (1.18) вытекает, что

$$\operatorname{ind} y = \lambda^\gamma. \quad (1.20)$$

Таким образом, для однородной функции в случае равенства индексов ресурсов индекс объема выпуска определяется индексами ресурсов. Если производственная функция однородна, то основное значение для анализа динамики выпуска представляют не объемы применяемых ресурсов, а соотношения между ними.

Приведем дополнительные соотношения между характеристиками функции f, имеющие место, если f — однородная функция степени однородности γ:

$$\chi^1_{11} x_1 + \ldots + \chi^1_{1n} x_n = \chi^1_1 f(x); \tag{1.21}$$

$$\chi^1_{21} + \ldots + \chi^1_{2n} = \chi^1_1; \tag{1.22}$$

$$\chi^2_{i1} x_1 + \ldots + \chi^2_{in} x_n = (\chi^1_1 - 1)\chi^1_{i}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.23}$$

Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве $M \subset R^n_+$. Функция f называется *супераддитивной*, если для любых точек x', x'' из M точка $x' + x''$ принадлежит M и

$$f(x' + x'') \geqslant f(x') + f(x''). \tag{1.24}$$

Для однородной функции f степени однородности γ имеют место следующие утверждения:

а) если $\gamma \leqslant 1$, то из условия супераддитивности (1.24) вытекает условие вогнутости (1.12);

б) если $\gamma \geqslant 1$, то из условия вогнутости (1.12) вытекает условие супераддитивности (1.24);

в) если $\gamma = 1$, то условия вогнутости и супераддитивности эквивалентны.

Условие супераддитивности для производственной функции допускает следующую простую интерпретацию. Пусть x — выбор ресурсов, представленный в виде объединения двух других наборов — x' и x'', $x = x' + x''$. Левая часть неравенства (1.24) показывает объем выпуска продукции, полученной с помощью ресурсов x; правая — сколько продукции можно получить, если сначала использовать часть ресурсов в количестве x', а затем — оставшуюся часть x''. Неравенство (1.24) означает, что резервирование ресурсов невыгодно для системы. Допущение противоположного неравенства привело бы к тому, что возник бы дополнительный эффект от дробления и резервирования ресурсов.

Таким образом, для линейно-однородных функций третий неоклассический критерий означает неэффективность резервирования ресурсов. Подобную интерпретацию допускает условие вогнутости и в общем случае.

Если неотрицательная функция f дважды непрерывно дифференцируема, то неоклассические критерии могут быть выражены в виде соотношений между ее характеристиками.

Критерий 1) выражается условиями

$$\chi^1_{1i} \geqslant 0, \; i = 1, \ldots, n. \tag{1.25}$$

Критерий 2) записывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{i=1}^{n} \chi^1_{2i}(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad i = 1, \ldots, n \tag{1.26}$$

или в виде соотношений между характеристиками второго порядка

$$\sum_{j=1}^{n} \chi^2_{1ij} x_j - \sum_{j=1}^{n} \chi^1_{1i} \chi^1_{2j} + \chi^1_{1i} = 0, \; i = 1, \ldots, n. \tag{1.27}$$

Условие вогнутости (критерий 3) дважды дифференцируемой функции f, определенной на открытом* выпуклом множестве M, состоит в неположительной определенности матрицы ее вторых производных.

Так, для функции $y = f(x_1, x_2)$ от двух переменных необходимое и достаточное условие вогнутости состоит в выполнении неравенств:

$$\chi^2_{111} \leqslant 0, \; \chi^2_{122} \leqslant 0, \; \chi^2_{111} \chi^2_{122} - (\chi^2_{112})^2 \geqslant 0. \tag{1.28}$$

Для того чтобы неотрицательная дважды непрерывно дифференцируемая функция $y = f(x_1, x_2)$ была классической, необходимо и достаточно, чтобы

$$\chi^1_1 \geqslant 0, \; \chi^1_2 \geqslant 0, \; \chi^1_{21} + \chi^1_{22} = 1, \; \chi^2_{111} \leqslant 0, \; \chi^2_{122} \leqslant 0. \tag{1.29}$$

1.3.5. Эластичность замены факторов производственной функции

Понятие эластичности замены факторов является одним из основных понятий теории производственных функций. Эластичность замены факторов служит характеристикой «самостоятельности» влияния отдельных аргументов производственной функции на ее значение.

Диаметрально противоположными при заданных начальных объемах ресурсов (факторов) являются следующие ситуации:

а) на объем выпуска положительное влияние оказывает увеличение лишь одного из факторов, в то время как вариа-

* Множество M называется *открытым*, если вместе с каждой точкой оно содержит достаточно малую ее окрестность.

ция остальных ресурсов не приводит к росту объема выпуска;

б) объем выпуска чувствителен к увеличению каждого из рассматриваемых ресурсов.

В ситуации а) уменьшение «влиятельного» фактора невозможно скомпенсировать за счет увеличения других факторов, в то время как в ситуации б) такая компенсация в принципе возможна (хотя, быть может, потребует привлечения значительных объемов компенсирующих ресурсов). В первом случае говорят об отсутствии заменяемости факторов, во втором — о ее наличии. И та и другая ситуация встречаются в практике хозяйствования. Среди множества производственных функций имеются функции, отражающие эти ситуации. Рассмотрим функцию

$$y = \min (a_1x_1, \ldots, a_nx_n), \qquad (1.30)$$

где y — объем выпуска продукции; $x_1, \ldots, x_n$ — показатели факторов производства; $a_1, \ldots, a_n$ — параметры производственной функции (эта функция носит название функции Леонтьева). Здесь в каждой точке $x = (x_1, \ldots, x_n)$ величина y определяется тем из показателей x_i, для которого величина a_ix_i минимальна. Увеличение выпуска возможно только при увеличении этого показателя x_i, остальные показатели (в пределах малых изменений) на y не влияют. Противоположную ситуацию описывает линейная функция $y = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$. Здесь ни один из факторов ни в одной точке не обладает «исключительными полномочиями» на увеличение объема выпуска. Последний реагирует на изменение уровня каждой из входящих в модель переменных $x_1, \ldots, x_n$. Естественно считать, что заменяемость факторов в функции Леонтьева равна нулю, а в линейной функции — бесконечности.

Вопрос о возможности замены факторов в производственной функции всегда решается по отношению к тому набору ресурсов, который фигурирует в качестве аргументов производственной функции. Если факторами служат укрупненные показатели размеров производственных фондов и численности промышленно-производственного персонала, а результат производства измеряется объемом товарной продукции, то вопрос об эластичности замены сводится к анализу возможности взаимного замещения живого и овеществленного труда.

При анализе возможностей замены ресурсов в различных моделях производственного процесса следует четко фиксировать уровень моделирования. Если выходными показателями модели являются количества изделий каждого из ви-

дов, то заменяемость имеет место тогда, когда выпуск продукции данного количества и номенклатуры возможен с помощью различного количества ресурсов. Здесь ненулевая эластичность замены факторов является результатом наличия различных технологий производства одной и той же продукции (*технологическая заменяемость*). На уровне же агрегированной экономической технологии заменяемость одного фактора другими возникает, если с помощью различных наборов ресурсов $x_1, \ldots, x_n$ и $x'_1, \ldots, x'_n$ можно произвести продукцию одного и того же объема (при условии, что эта продукция предназначена для удовлетворения аналогичных функциональных потребностей). Таким образом, на уровне производственных функций оценивается не столько технологическая, сколько *экономическая заменяемость* факторов.

Опишем способы формирования различных показателей заменяемости факторов производства и связи между этими показателями для двухфакторных производственных функций.

Пусть

$$y = f(x_1, x_2) \tag{1.31}$$

— дважды дифференцируемая неотрицательная двухфакторная функция, определенная на области M, лежащей в неотрицательном квадранте пространства R^2_+ и $x^0 = (x^0_1, x^0_2) \in R^2_+$. Рассмотрим ситуацию, в которой возможно замещение факторов.

Изменим слегка переменную x_1, взяв значение функции $y = f(x_1, x_2)$ в точке $(x^0_1 + \Delta x_1, x^0_2)$. Вообще говоря, оно будет отличаться от значения в точке (x^0_1, x^0_2). Однако в некоторых случаях изменение x_1 можно скомпенсировать изменением второго аргумента функции. Если имеет место этот случай, то вариация Δx_1 определяет минимальную величину Δx_2 (если $f(x_1, x_2)$ — возрастающая функция, то $\Delta x_2 < 0$), для которой

$$f(x^0_1 + \Delta x_1, x^0_2 + \Delta x_2) = f(x^0_1, x^0_2) = c^0. \tag{1.32}$$

В частности, если $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x^0_1, x^0_2) \neq 0$, то при значениях x_1, принадлежащих некоторой окрестности точки x^0_1, определена функция $h_0(x_1)$, такая, что

$$f(x_1, h_0(x_1)) = f(x^0_1, x^0_2) = c^0 \tag{1.33}$$

при любом x_1 из этой окрестности. Компенсирующая Δx_1 величина Δx_2 выражается при этом в виде $\Delta x_2 = h_0(x^0_1 + \Delta x_1) - h_0(x^0_1)$. Отношение $\Delta x_2/\Delta x_1$ определяет величину

уменьшения второго фактора, обеспечивающую компенсацию прироста первого фактора на единицу, и служит показателем возможности замены факторов при ранении объема выпуска. Условие непрерывной дифференцируемости функции f и неравенство $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0) \neq 0$ обеспечивают существование предела $\lim\limits_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$. Он равен:

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{h_0(x_1^0 + \Delta x_1) - h_0(x_1^0)}{\Delta x_1} = h_0'(x_1^0). \qquad (1.34)$$

Для возрастающих функций f величина $h_0'(x_1^0) < 0$, поэтому в качестве характеристики прироста второго фактора, необходимого для компенсации единицы изменения первого фактора, рассматривают $-h_0'(x_1^0)$. Таким образом, величина $-h_0'(x_1^0)$ является первой из характеристик замещаемости факторов. Компенсирующая функция $h_0^*(x_1)$ определена только для непрерывно дифференцируемых функций f и только в тех точках, где частная производная по второму аргументу отлична от нуля. В точках, где $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$, $h_0'(x_1^0)$ можно считать равной бесконечности.

Характеристика количества первого фактора, необходимого для компенсации изменения второго фактора на единицу, равна, как легко проверить, $-1/h_0'(x_1^0)$.

По теореме о производной неявной функции функция $h_0'(x_1)$ допускает следующее выражение через частные производные функции f:

$$-h_0'(x_1) = \frac{f_1(x_1, h_0(x_1))}{f_2(x_1, h_0(x_1))}, \qquad (1.35)$$

где через $f_i(x_1, x_2)$ обозначена частная производная функция f по i-му аргументу, $i = 1, 2$.

Следовательно, предельная норма замены χ_{312}' служит характеристикой замены факторов первого порядка. Она характеризует прирост второго фактора, необходимый для компенсации (замещения) изменения первого фактора на единицу по сравнению с первоначальным его количеством.

Геометрическая иллюстрация описанной ситуации изображена на рис. 1.2. Функция $x_2 = h_0(x_1)$ выражает уравнение изокванты, т. е. множества точек (x_1, x_2), в которых $f(x_1, x_2) = f(x_1^0, x_2^0)$, вблизи точки x_1^0, x_2^0. Ее производная $h_0'(x_1^0)$, равная предельной норме замены с обратным знаком, равна также тангенсу угла касательной к изокванте в точке $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ с осью x_1 (на рисунке — угол α').

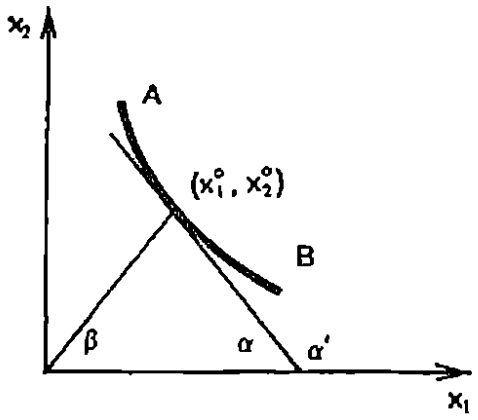


Рис. 1.2

Предельная норма замены $f_1/f_2 = -h_0'$ в точке x_1^0, x_2^0 совпадает с тангенсом дополнительного угла α:

$$f_1/f_2 = \operatorname{tg} \alpha. \qquad (1.36)$$

Дальнейший анализ механизма взаимной замены факторов в производственной функции связан с исследованием динамики заменяемости при изменении точки (x_1^0, x_2^0). Компенсирующая функция $h_0(x_1)$ строилась выше при условии, что исходной является точка $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$. Однако она сохраняет свой смысл компенсирующей функции и для других точек, находящихся в достаточно малой окрестности точки x^0. Это дает возможность исследовать зависимость механизма замещения факторов от исходной точки, анализируя изменение функции $-h_0'(x_1)$ при малых вариациях величины x_1.

Здесь возможны, вообще говоря, различные подходы. В качестве характеристики изменения функции $-h_0'(x_1)$ можно рассматривать производную $\frac{d(-h_0'(x_1))}{dx_1}$, логарифмическую производную по x_1 в точке $x_1 = x_1^0$ и т. д. Традиционной характеристикой динамики предельной нормы замены служит, однако, относительное (процентное) изменение функции $-h_0'(x_1)$, приходящееся на единицу относительного (процентного) изменения отношения факторов x_2/x_1 при условии компенсации. Поскольку в этих условиях $x_2 = h_0(x_1)$, то в функции $-h_0'(x_1)$ переменная x_1 заменяется на $u = h_0(x_1)/x_1$ (обозначим получившуюся функцию через $\bar{h}_0'(u)$). В качестве характеристики замены факторов второго порядка рассматривается величина

$$\sigma = \left(\frac{d\bar{h}_0'(u)}{du} \Big/ \frac{\bar{h}_0'(u)}{u} \right)^{-1}. \qquad (1.37)$$

Она показывает, на сколько пунктов изменится количество второго фактора, необходимое для компенсации увеличения первого фактора на единицу при изменении отношения между факторами на один пункт. Эта величина и называется *эластичностью замены факторов* для двухфакторной функции.

Геометрическая иллюстрация здесь такова. Отношение $u = h_0(x_1)/x_1$ выражает тангенс угла β (на рис. 1.2) между радиус-вектором точки $(x_1, x_2) = (x_1, h_0(x_1))$, расположенной на изокванте, и осью абсцисс. Для вогнутых функций этот угол однозначно определяется выбором точки на изокванте. С другой стороны, точка на изокванте (в малой окрестности точки (x_1^0, x_2^0) и при условии $f_2(x_1^0, x_2^0) \neq 0$) однозначно определяется углами α или β. Таким образом, между этими углами существует локальная взаимно однозначная зависимость. Эту зависимость и характеризует эластичность замены факторов

$$\sigma = \frac{d\,\mathrm{tg}\,\beta}{d\,\mathrm{tg}\,\alpha} \Big/ \frac{\mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{tg}\,\alpha} = \left(\frac{d\,\mathrm{tg}\,\alpha}{d\,\mathrm{tg}\,\beta} \Big/ \frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}\,\beta}\right)^{-1}. \qquad (1.38)$$

Пользуясь выражением производной функции $h_0(x_1)$ через частные производные функции $f(x_1, x_2)$, можно выразить эластичность замены через предельную норму замены. Для этого сделаем замену переменных x_1, x_2 в функциях $f_1(x_1, x_2)$, $f_2(x_1, x_2)$: пусть $u_1 = x_2/x_1$, $u_2 = f(x_1, x_2)$; обозначим через $\bar{f}_1(u_1, u_2)$, $\bar{f}_2(u_1, u_2)$ получившиеся функции. Частная производная по аргументу u_1 предельной нормы замены $\frac{\bar{f}_1(u_1, u_2)}{\bar{f}_2(u_1, u_2)}$, вычисленная в точке $u_1^0 = \frac{x_2^0}{x_1^0}$, $u_2^0 = f(x_1^0, x_2^0)$, соответствует дифференцированию функции $(-\bar{h}_0(u))$ при $f(x_1, x_2) = f(x_1^0, x_2^0)$ в точке $u = \frac{x_2^0}{x_1^0} = \frac{h_0(x_1^0)}{x_1^0}$. Отсюда вытекает, что

$$\sigma(x_1^0, x_2^0) = \left[\left(\frac{\partial \frac{\bar{f}_1(u_1, u_2)}{\bar{f}_2(u_1, u_2)}}{\partial u_1} \Bigg/ \frac{\frac{\bar{f}_1(u_1, u_2)}{\bar{f}_2(u_1, u_2)}}{u_1}\right)\left(\frac{x_2^0}{x_1^0}, f(x_1^0, x_2^0)\right)\right]^{-1} \qquad (1.39)$$

Иногда это определение записывают в сокращенном виде:

$$\sigma = \left(\frac{d\frac{f_1}{f_2}}{d\frac{x_2}{x_1}} \Bigg/ \frac{f_1/f_2}{x_2/x_1}\right)^{-1} \quad \text{при } f(x_1, x_2) = \mathrm{const}. \qquad (1.40)$$

С другой стороны, рассматривая обратную зависимость тангенса угла β от тангенса угла α, эластичность замены можно определить как

$$\sigma = \frac{d\frac{x_2}{x_1}}{d\frac{f_1}{f_2}}\Bigg|\frac{x_2/x_1}{f_1/f_2} \text{ при } f(x_1, x_2) = \text{const}, \qquad (1.41)$$

понимая под этой записью следующее. Вместо переменных x_1, x_2 вводятся новые переменные p_1, p_2, связанные с прежними соотношениями $p_1 = f_1(x_1, x_2)/f_2(x_1, x_2)$, $p_2 = f(x_1, x_2)$. Это преобразование невырождено, если $f_2 \neq 0$ и $-f_{11}f_2^2 + 2f_{12}f_1f_2 - f_{22}f_1^2 \neq 0$. В этом случае переменные x_1, x_2 могут быть выражены через p_1, p_2. Частная логарифмическая производная отношения x_2/x_1, вычисленная при $p_1 = \frac{f_1(x_1^0, x_2^0)}{f_2(x_1^0, x_2^0)}$, $p_2 = f(x_1^0, x_2^0)$, также выражает эластичность замены факторов в точке (x_1^0, x_2^0):

$$\sigma(x_1^0, x_2^0) = \left(\frac{\partial\frac{x_2(p_1, p_2)}{x_1(p_1, p_2)}}{\partial p_1}\Bigg|\frac{x_2(p_1, p_2)/x_1(p_1, p_2)}{p_1}\right)\left(\frac{f_1(x_1^0, x_2^0)}{f_2(x_1^0, x_2^0)}, f(x_1^0, x_2^0)\right). \qquad (1.42)$$

Приведем рабочую формулу, непосредственно выражающую $\sigma(x_1, x_2)$ через аргументы и значения производственной функции и ее производных:

$$\sigma(x_1, x_2) = \frac{f_1 f_2 (x_1 f_1 + x_2 f_2)}{x_1 x_2 (-f_{11} f_2^2 + 2f_{12} f_1 f_2 - f_{22} f_1^2)}, \qquad (1.43)$$

где производные берутся в точке (x_1, x_2).

Из этой формулы вытекает симметричность определения эластичности замены факторов в двухфакторном случае: эластичность замены первого фактора вторым равна эластичности замены второго фактора первым.

Если $f(x_1, x_2)$ — однородная функция, то определение и вычисление эластичности замены факторов может быть упрощено. Поскольку для однородной функции степени однородности γ отношение частных производных

$$\frac{f_1(x_1, x_2)}{f_2(x_1, x_2)} = \frac{x_1^{\gamma-1} f_1\left(1, \frac{x_2}{x_1}\right)}{x_1^{\gamma-1} f_2\left(1, \frac{x_2}{x_1}\right)} = \frac{f_1\left(1, \frac{x_2}{x_1}\right)}{f_2\left(1, \frac{x_2}{x_1}\right)} \qquad (1.44)$$

зависит только от отношения факторов, вместо частных производных в определениях (1.39) и (1.42) можно рассматривать прямые производные функции $\dfrac{f_1\left(1, \dfrac{x_2}{x_1}\right)}{f_2\left(1, \dfrac{x_2}{x_1}\right)}$ по $\dfrac{x_2}{x_1}$:

$$\sigma(x_1, x_2) = \left(\frac{d \dfrac{f_1\left(1, \dfrac{x_2}{x_1}\right)}{f_2\left(1, \dfrac{x_2}{x_1}\right)}}{d \dfrac{x_2}{x_1}} \Bigg/ \frac{f_1\left(1, \dfrac{x_2}{x_1}\right) \Big/ f_2\left(1, \dfrac{x_2}{x_1}\right)}{x_2/x_1} \right)^{-1} =$$

$$= \frac{d \dfrac{x_2}{x_1}}{d \dfrac{f_1}{f_2}} \Bigg/ \frac{x_2/x_1}{f_1/f_2}. \qquad (1.45)$$

В формулах (1.40) и (1.41) для однородных функций условие $f(x_1, x_2) = \text{const}$ может быть опущено.

Формула (1.43) для вычисления эластичности замены факторов также упрощается. Заметим сначала, что предельная норма и эластичность замены факторов инвариантны относительно произвольного дважды дифференцируемого преобразования функции f. Именно, пусть φ — дважды дифференцируемая функция одного переменного и $g(x_1, x_2) = \varphi(f(x_1, x_2))$. Тогда $\sigma_g = \sigma_f$.

Значит, если речь идет о функции f степени однородности γ, то достаточно вычислить эластичность замены факторов функции $g = f^{\frac{1}{\gamma}}$, являющейся линейно-однородной. Для линейно-однородных функций формула (1.43) в силу теоремы Эйлера $x_1 f_1 + x_2 f_2 = f$ и вытекающих из нее соотношений $f_{11} = -\dfrac{x_2}{x_1} f_{12}$, $f_{22} = -\dfrac{x_1}{x_2} f_{12}$ имеет особенно простой вид*:

$$\sigma(x_1, x_2) = \frac{f_1(x_1, x_2) f_2(x_1, x_2)}{f(x_1, x_2) f_{12}(x_1, x_2)}. \qquad (1.46)$$

* Это выражение было использовано Дж. Хиксом в 1932 г. для хронологически первого определения эластичности замены факторов линейно-однородной производственной функции [75]. Широкое распространение формула (1.43) получила после публикации в книге Аллена [70] в 1938 г.; эластичность замены факторов (1.43) будем называть в дальнейшем эластичностью замены факторов по Аллену и обозначать через σ^A.

Для функции произвольной степени однородности γ имеют место равенства

$$\sigma_f^A(x_1, x_2) = \sigma_{f^{1/\gamma}}^A(x_1, x_2) = \frac{f_1 f_2}{(1-\gamma) f_1 f_2 + \gamma f f_{12}}. \qquad (1.47)$$

Эта формула является во многих случаях наиболее удобной для вычисления эластичности замены однородных функций.

В последние годы в практике экономико-математического анализа применяется еще одна характеристика замещения факторов, встречавшаяся, в частности, в работах Б. Н. Михалевского (см., например, [45]). Эластичность замены факторов по Михалевскому определяется выражением

$$\sigma^M = \frac{d\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{d\left(\frac{f_1(x_1, x_2)}{f_2(x_1, x_2)}\right)} \Bigg/ \frac{x_2/x_1}{f_1(x_1, x_2)/f_2(x_1, x_2)}, \qquad (1.48)$$

в котором дифференциалы понимаются как полные дифференциалы, т. е. линейные дифференциальные формы с функциональными коэффициентами. Числитель и знаменатель формулы (1.48) представляют собой линейные комбинации независимых дифференциалов dx_1, dx_2 с коэффициентами, зависящими от x_1, x_2.

Таким образом, σ^M является функцией от четырех независимых переменных x_1, x_2, dx_1, dx_2, причем относительно последних двух — дробно-линейной. Геометрически можно представлять функцию $\sigma^M(x_1^0, x_2^0, dx_1, dx_2)$ определенной на касательной плоскости к поверхности $y = f(x_1, x_2)$, при этом первая пара аргументов x_1^0, x_2^0 определяет точку касания плоскости, а вторая — координаты на самой плоскости.

Эластичность замены факторов по Михалевскому имеет следующую интерпретацию. Фиксируем точку (x_1^0, x_2^0) и рассмотрим близкую к ней точку (x_1^1, x_2^1). При переходе от (x_1^0, x_2^0) к (x_1^1, x_2^1) определенным образом изменяется как отношение x_2/x_1, так и предельная норма замены f_1/f_2. Величина $\frac{\Delta(x_2/x_1)}{\Delta(f_1/f_2)} \Big/ \frac{(x_2/x_1)}{(f_1/f_2)}$ выражает соотношение между процентным изменением отношения факторов и отношения их предельных производительностей при данном изменении самих факторов. Соответственно величина $\frac{1}{\sigma^M(x_1, x_2, dx_1, dx_2)}$ показывает, какое процентное изменение предельной нор-

мы замены приходится на один процент изменения отношения факторов при переходе от точки (x_1, x_2) к точке $(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2)$. Заметим, что при определении эластичности замены факторов по Аллену факторы изменялись так, чтобы обеспечивалось постоянство выпуска (т. е. в пределах одной изокванты), в то время как эластичность замены факторов по Михалевскому через предельную норму замены характеризует более общий процесс произвольного изменения факторов.

Если функция $y = f(x_1, x_2)$ — однородная, то $\sigma^M(x_1, x_2, dx_1, dx_2)$ не зависит от dx_1, dx_2 и, кроме того, тождественно равна $\sigma^A(x_1, x_2)$ [36]. Общим для них является также свойство инвариантности относительно произвольного дважды дифференцируемого преобразования функции. Заметим, что независимость σ^M от dx_1, dx_2 и ее равенство σ^A не являются характерным только для однородных функций: существует широкий класс неоднородных функций, для которых σ^M не зависит от dx_1, dx_2 и равна σ^A (см. п. 2.2.5).

Для вычисления эластичности замены факторов по Михалевскому используются рабочие формулы:

$$\sigma^M(x_1, x_2, dx_1, dx_2) = \\ = f_1 f_2 \frac{-\frac{1}{x_1} dx_1 + \frac{1}{x_2} dx_2}{(f_{11} f_2 - f_{12} f_1)\, dx_1 + (f_{12} f_2 - f_{22} f_1)\, dx_2}. \quad (1.49)$$

Итак, первоначально эластичность замены факторов для двухфакторной производственной функции определялась через уравнение изокванты (1.37), затем — как частная производная предельной нормы замены по отношению факторов (1.39) и как частная производная отношения факторов при изменении предельной нормы замены (1.42). Все эти определения являются эквивалентными. Иную характеристику представляет определение эластичности факторов по Михалевскому. На множестве однородных производственных функций все перечисленные определения эластичности равносильны.

Легко проверить, что эластичность замены факторов для двухфакторной функции Леонтьева по всем определениям равна нулю, для линейной функции — бесконечности.

1.3.6. Показатели эластичности замены факторов для многофакторной производственной функции

В отличие от случая двух факторов, где различными по существу оказались лишь два определения эластичности замены факторов, для многофакторных функций круг не-

эквивалентных характеристик замещаемости факторов является достаточно широким. Каждая из них представляет собой обобщение одного из определений эластичности замены для двухфакторных функций, является (кроме эластичности замены факторов по Михалевскому) функцией от $x_1, \ldots, x_n$ и характеризует с определенной стороны возможности замещения i-го фактора j-м фактором.

Различные определения эластичности замены двух факторов в n-факторной производственной функции $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ делятся на два класса. В первый из них входят определения, которые получены путем сведéния многофакторной функции к двухфакторной и последующего применения определений функции эластичности замены по Аллену и Михалевскому для двухфакторных функций. Именно, эластичность замены между i-м и j-м факторами функции f в точке $x_1, \ldots, x_n$ определяется как эластичность замены двухфакторной функции

$$y = \tilde{f}(x_i, x_j), \tag{1.50}$$

полученной из $f(x_1, \ldots, x_n)$ фиксацией всех переменных, кроме x_i, x_j, на постоянном уровне. Сохраним для эластичности замены факторов многофакторных функций обозначение σ, добавив индексы переменных, к которым относится определение, и волнистую черту сверху для определений, в которых $x_k = \text{const}$ при $k = 1, \ldots, n$, $k \neq i, j$. Тогда

$$\tilde{\sigma}^{A}_{ij}(x_1, \ldots, x_n) = \left[\left(\frac{\partial \frac{f_i}{f_j}(x_1, \ldots, x_{i-1}, u_i, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, u_j, x_{j+1}, \ldots, x_n)}{\partial u_i}\right|_{u_i = \frac{f_i/f_j}{u_i}}\right)\left(x_1, \ldots, x_{i-1}, \frac{x_j}{x_i}, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, f(x_1, \ldots, x_n), x_{j+1}, \ldots, x_n\right)\right]^{-1}. \tag{1.51}$$

Данная характеристика многофакторной производственной функции называется также *эластичностью замены факторов по Мак Фаддену* (σ^{Φ}_{ij}) [72].

Поскольку все переменные $x_1, \ldots, x_n$, кроме x_i и x_j, остаются постоянными, $dx_k = 0$ при $k = 1, \ldots, n$, $k \neq i, j$.

Эластичность замены факторов по Михалевскому $\tilde{\sigma}_{ij}^{M}$ зависит поэтому от $x_1, \ldots, x_n, dx_i, dx_j$:

$$\tilde{\sigma}_{ij}^{M}(x_1, \ldots, x_n, dx_i, dx_j) =$$

$$= \frac{d\dfrac{x_j}{x_i}}{d\dfrac{f_i(x_1, \ldots, x_n)}{f_j(x_1, \ldots, x_n)}} \Bigg| \frac{x_j/x_i}{f_i(x_1, \ldots, x_n)/f_j(x_1, \ldots, x_n)}. \quad (1.52)$$

Для однородных двухфакторных функций эластичности замены по Аллену и Михалевскому совпадают. Этот результат не переносится непосредственно на n-факторный случай при $n > 2$, поскольку функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, однородная как функция от n переменных, может не быть однородной как функция от части переменных. Пример: линейная функция $y = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$ не является однородной как функция от x_1, x_2. Наоборот, функция Кобба—Дугласа $y = a_0x_1^{a_1} \ldots x_n^{a_n}$ однородна как функция от любых подмножеств переменных (степень однородности, однако, будет различной). Можно доказать, что функция Кобба—Дугласа является единственной функцией, однородной относительно любого подмножества переменных.

Для вычисления эластичности замены σ_{ij}^{Φ} и $\tilde{\sigma}_{ij}^{M}$ используются следующие формулы:

$$\sigma_{ij}^{\Phi} = \tilde{\sigma}_{ij}^{A} = \frac{f_i f_j (x_i f_i + x_j f_j)}{x_i f_j (-f_{ii} f_j^2 + 2f_{ij} f_i f_j - f_{jj} f_i^2)}; \quad (1.53)$$

$$\tilde{\sigma}_{ij}^{M} = \frac{f_i f_j \left(-\dfrac{dx_i}{x_i} + \dfrac{dx_j}{x_j}\right)}{(f_{ii} f_j - f_{ij} f_i)\, dx_i + (f_{ij} f_j - f_{jj} f_i)\, dx_j}, \quad (1.54)$$

аналогичные выражениям (1.43), (1.49).

Второй класс составляют определения эластичности замены двух факторов, в которых все остальные факторы также предполагаются изменяющимися. В этот класс входят обратная и прямая эластичности замены, эластичности замены по Аллену и Михалевскому. Прежде чем переходить к их определению, заметим, что относительное разнообразие характеристик второго порядка, отражающих эластичность замены факторов многофакторной производственной функции, связано с разнообразием ситуаций, в которых рассматривается вопрос о возможности компенсации одних факторов другими. Каждая такая ситуация для n-факторной функции $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ характеризуется тем, что какие-либо $n - 2$ величины, зависящие от $x_1, \ldots, x_n$, остаются не-

изменными, а оставшиеся две величины считаются переменными.

Будем называть *обратными* те определения эластичности замены факторов, которые получены обобщением определения (1.39), и *прямыми* — определения, обобщающие (1.42). Рассмотрим сначала варианты обратных эластичностей замены факторов. Обратная эластичность замены i-го фактора j-м предназначена для анализа изменения предельной нормы замены в зависимости от изменения соотношения между факторами в условиях неизменности значения функции. Для такого анализа, так же как и при $n = 2$, следует сделать замену переменных $x_1, \ldots, x_n$ в предельной норме замены новыми переменными $u_1, \ldots, u_n$, одной из которых должно быть соотношение между i-м и j-м факторами, другой — производственная функция. После этого характеристикой динамики предельной нормы замены может служить ее частная логарифмическая производная по отношению i-го и j-го факторов. Однако результат частичного дифференцирования функции по заданному аргументу зависит от того, каковы остальные ее аргументы. Поэтому в отличие от двухфакторного случая, где набор новых аргументов $u_1, \ldots, u_n$ исчерпывался «обязательными» переменными $u_1 = x_2/x_1$, $u_2 = f(x_1, x_2)$, при $n > 2$ вопрос об остальных аргументах становится принципиальным. Здесь имеются следующие возможности для выбора остальных постоянных аргументов:

а) исходные переменные x_k;

б) отношения x_k к x_j, $k = 1, \ldots, n$, $k \neq i, j$;

в) произвольные заданные отношения x_k/x_l.

В первом случае при взятии частной производной по x_i/x_j остальные переменные x_k, $k = 1, \ldots, n$; $k \neq i, j$, остаются постоянными, следовательно, мы приходим к определению (1.51). Рассмотрим более подробно второй случай.

Обозначим через $u_1, \ldots, u_n$ новые переменные, связанные с $x_1, \ldots, x_n$ соотношениями

$$u_1 = \frac{x_1}{x_j}, \quad u_2 = \frac{x_2}{x_j}, \ldots, u_{j-1} = \frac{x_{j-1}}{x_j}, \; u_{j+1} = \frac{x_{j+1}}{x_j}, \ldots,$$

$$u_{n-1} = \frac{x_{n-1}}{x_j}, \; u_n = f(x_1, \ldots, x_n).$$

Теперь

$$\frac{x_i}{x_j} = \begin{cases} u_i, \text{ если } i < j; \\ u_{i-1}, \text{ если } i > j. \end{cases} \tag{1.55}$$

В дальнейшем мы убедимся в том, что преобразование переменных $x \to u$ является невырожденным и, следовательно, обратимым, что дает возможность рассматривать каждую переменную x_i как функцию от $u_1, \ldots, u_n$. Поэтому частную производную $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ можно рассматривать как функцию $\bar{f}_i$ от $u_1, \ldots, u_n$, где $\bar{f}_i(u_1, \ldots, u_n) = \bar{f}_i(x_1(u_1, \ldots, u_n), \ldots, x_n(u_1, \ldots, u_n))$. Теперь *обратная эластичность замены i-го фактора j-м* в точке $x_1, \ldots, x_n$ определяется как

$$\sigma_{ij}^{\text{обр}}(x_1, \ldots x_n) =$$

$$= \begin{cases} \left[\left(\dfrac{\partial \dfrac{\bar{f}_j(u_1, \ldots, u_n)}{\bar{f}_i(u_1, \ldots, u_n)}}{\partial u_i} \,\middle|\, \dfrac{\bar{f}_j(u_1, \ldots, u_n)/\bar{f}_i(u_1, \ldots, u_n)}{u_i}\right)\right. \\ \left.(u_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_n(x_1, \ldots, x_n))\right]^{-1}, \text{ если } i < j; \\ \left[\left(\dfrac{\partial \dfrac{\bar{f}_j(u_1, \ldots, u_n)}{\bar{f}_i(u_1, \ldots, u_n)}}{\partial u_{i-1}} \,\middle|\, \dfrac{\bar{f}_j(u_1, \ldots, u_n)/\bar{f}_i(u_1, \ldots, u_n)}{u_{i-1}}\right)\right. \\ \left.(u_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_n(x_1, \ldots, x_n))\right]^{-1}, \text{ если } i > j. \end{cases} \tag{1.56}$$

Для сокращения записи $\sigma_{ij}^{\text{обр}}$ в литературе используют также следующее выражение:

$$\sigma_{ij}^{\text{обр}} = \left(\frac{\partial \ln \dfrac{f_j}{f_i}}{\partial \ln \dfrac{x_i}{x_j}}\right)^{-1} \text{ при } f(x) = \text{const}. \tag{1.57}$$

Следует, однако, заметить, что при такой записи неясно, от каких аргументов, кроме $\frac{x_i}{x_j}$, зависит предельная норма замены i-го и j-го факторов, поэтому более точной была бы запись

$$\sigma_{ij}^{\text{обр}} = \left(\frac{\partial \ln \dfrac{f_j}{f_i}}{\partial \ln \dfrac{x_i}{x_j}}\right)^{-1} \text{ при } f(x) = \text{const}, \ \frac{x_k}{x_j} = \text{const}, \tag{1.58}$$

$$k = 1, \ldots, n, \ k \neq i, j.$$

Величина $\frac{1}{\sigma_{ij}^{обр}}$ показывает, на сколько пунктов изменится предельная норма замены i-го фактора j-м при изменении соотношения i-го и j-го факторов на один пункт в условиях, когда соотношения между остальными факторами и j-м, а также значение функции остаются неизменными.

Геометрическая интерпретация обратной эластичности замены i-го фактора j-м аналогична геометрической интерпретации двухфакторной эластичности замены по Аллену. Касательная гиперплоскость, проведенная к поверхности $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ в точке $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, имеет вид

$$y = f_1(x^0)(x_1 - x_1^0) + \ldots + f_n(x^0)(x_n - x_n^0) + f(x^0). \quad (1.59)$$

Соотношение между частными производными f_{n-1} и f_n в точке x^0 определяет положение двумерной плоскости

$$y = f_{n-1}(x^0)(x_{n-1} - x_{n-1}^0) + f_n(x^0)(x_n - x_n^0) + f(x^0) \quad (1.60)$$

в трехмерном пространстве $\{y, x_{n-1}, x_n\}$, полученном фиксацией всех аргументов $x_1, \ldots, x_{n-2}$ на уровне $x_1 = x_1^0, \ldots, x_{n-2} = x_{n-2}^0$. (Все двумерные плоскости с одинаковым отношением коэффициентов при x_{n-1} и x_n параллельны.)

Непосредственной характеристикой этого положения может служить (так же как и в двумерном случае) тангенс угла между касательной к изокванте, проходящей через точку x_{n-1}^0, x_n^0, и осью x_{n-1} (при $x_i = x_i^0$, $i = 1, \ldots, n-2$). Он равен $-\frac{f_1(x^0)}{f_2(x^0)}$. Переход от точки x^0 к близкой точке x^1 приводит, вообще говоря, к изменению коэффициентов касательной гиперплоскости

$$y = f_1(x^1)(x_1 - x_1^1) + \ldots + f_n(x^1)(x_n - x_n^1) + f(x^1). \quad (1.61)$$

Новое соотношение $\frac{f_{n-1}(x^1)}{f_n(x^1)}$ также характеризует положение двумерной плоскости

$$y = f_{n-1}(x^1)(x_{n-1} - x_{n-1}^1) + f_n(x^1)(x_n - x_n^1) + f(x^1), \quad (1.62)$$

однако теперь в подпространстве $\{y, x_{n-1}, x_n\}$, полученном фиксацией остальных аргументов $x_1, \ldots, x_{n-2}$ на другом уровне $x_i = x_i^1$, $i = 1, \ldots, n-2$. Если $f(x^1) = f(x^0)$, т. е. точка x^1 находится на той же изокванте, то отношение $\frac{f_{n-1}(x^1)}{f_n(x^1)}$ с обратным знаком равно тангенсу угла между новым положением касательной прямой к той же изокван-

те и осью x_{n-1}. Таким образом, величина $\frac{1}{\sigma^{\text{обр}}_{n-1,\,n}(x^0)}$, определенная (1.56) при $i = n - 1$, $j = n$, показывает, на сколько пунктов изменится тангенс угла между касательной к изокванте (при $x_1 = x_1^0, \ldots, x_{n-2} = x_{n-2}^0$) и осью x_{n-1} при изменении тангенса угла между проекцией радиуса-вектора точки x^0 на плоскость $\{x_{n-1}, x_n\}$ и осью x_{n-1} на один пункт. Предполагается, что при этом изменении углы проекций радиуса-вектора на ряд других плоскостей $\{x_r, x_s\}$ с их осями не меняются, а изменяемая точка находится на изокванте.

Геометрическая интерпретация определения $\tilde{\sigma}^{A}_{ij}$ отличается от приведенной выше только более жесткими ограничениями на изменения точки: постоянными должны быть не только углы, но и длины проекций радиуса-вектора на все плоскости $\{x_r, x_s\}$, $r, s \neq n - 1, n$.

Приведем без доказательства рабочую формулу для вычисления $\sigma^{\text{обр}}_{ij}$:

$$\sigma^{\text{обр}}_{ij} = \frac{f_i f_j \sum\limits_{k=1}^{n} f_k x_k}{x_i \left(-f_i f_j \sum\limits_{k=1}^{n} f_{kj} x_k + f_i f_{ij} \sum\limits_{k=1}^{n} f_k x_k + f_i f_j \sum\limits_{k=1}^{n} f_{ki} x_k - f_j f_{ii} \sum\limits_{k=1}^{n} f_k x_k \right)}. \qquad (1.63)$$

Заметим, что определение $\sigma^{\text{обр}}_{ij}$, так же как и формула (1.63) для ее вычисления, несимметрично относительно i и j. Найдем в качестве примера обратную эластичность замены второго аргумента третьим в функции $y = x_1 x_2 + x_3$. Для этой функции $f_1 = x_2$, $f_2 = x_1$, $f_3 = 1$, $f_{12} = 1$, $f_{13} = f_{22} = f_{23} = f_{33} = 0$. Теперь согласно (1.63)

$$\sigma^{\text{обр}}_{23} = \frac{2x_1 x_2 + x_3}{x_1 x_2}.$$

Вычислим обратную эластичность замены третьего фактора вторым:

$$\sigma^{\text{обр}}_{32} = -\frac{2x_1 x_2 + x_3}{x_1 x_3} \neq \sigma^{\text{обр}}_{23}.$$

Заметим также, что если сгруппировать все члены, со-

держащие производные по аргументам $x_1, \ldots, x_{n-2}$, то получим формулу

$$\frac{1}{\sigma^{\text{обр}}_{n-1,\,n}} = \frac{x_{n-1}}{\sum\limits_{i=1}^{n} f_i x_i}\left(S' - f_{nn}\, x_n \frac{f_{n-1}}{f_n} + \right.$$

$$\left. + 2f_{n-1,\,n}\, x_n - \frac{f_n}{f_{n-1}}\, f_{n-1,\,n-1}\, x_n\right),$$

где S' — сумма функций, обращающихся в нуль, если $f_1 = f_2 = \ldots = f_{n-2}$. Отсюда

$$\frac{1}{\sigma^{\text{обр}}_{n-1,\,n}} = S + \frac{1}{\sigma^{\text{A}}},$$

где через S обозначена функция от $x_1, \ldots, x_n$, обращающаяся в нуль в тех случаях, когда f не зависит от $x_1, \ldots, x_{n-2}$; через σ^{A} — эластичность замены факторов x_{n-1} и x_n по Аллену для двухфакторной функции $y = f(x_{n-1}, x_n)$.

Рассмотрим теперь вкратце третий, более общий случай определения $\sigma^{\text{обр}}_{n-1,\,n}$, когда в качестве постоянных аргументов $u_1, \ldots, u_{n-2}$ предельной нормы замены факторов выступают произвольно заданные отношения $u_i = x_{a_i}/x_{b_i}$, $i = 1, \ldots, n-2$. Какие возможности здесь допустимы? Прежде всего необходимо, чтобы преобразование $x \to u$ было невырожденным и допускало обратное преобразование $u \to x$. Иными словами, все x_i, $i = 1, \ldots, n$, должны выражаться через $u_1, \ldots, u_n$. Далее, среди $u_1, \ldots, u_{n-1}$ не должно быть зависимых, т. е. между $u_1, \ldots, u_{n-1}$ не допускается никакого функционального соотношения. Можно доказать, что эти условия выполнены, если каждый из $x_1, \ldots, x_{n-2}$ хотя бы раз входит в $u_1, \ldots, u_{n-2}$. Следовательно, в качестве переменных $u_1, \ldots, u_{n-2}$ может быть в принципе выбран любой набор отношений x_{a_i}/x_{b_i}, включающих все переменные $x_1, \ldots, x_{n-2}$. Поскольку каждому такому набору при $n > 2$ соответствует свое понятие обратной эластичности замены, в определение обратной эластичности замены факторов для многофакторных производственных функций следует включать явное указание того, какие отношения переменных остаются неизменными.

В случае, когда $f(x_1, \ldots, x_n)$ — однородная функция, определение обратной эластичности замены можно упростить. Так же как и в двумерном случае, предельная норма замены однородной производственной функции естественным способом может рассматриваться как функция от отношения переменных:

$$\frac{f_n(x_1, \ldots, x_n)}{f_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)} = \frac{x_n^{\gamma-1} f_n\left(\frac{x_1}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}, 1\right)}{x_n^{\gamma-1} f_{n-1}\left(\frac{x_1}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}, 1\right)} =$$

$$= \frac{f_n\left(\frac{x_1}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}, 1\right)}{f_{n-1}\left(\frac{x_1}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}, 1\right)}. \qquad (1.64)$$

Если в качестве набора постоянных факторов взять $\frac{x_1}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-2}}{x_n}$, то обратная эластичность замены факторов в точке $x_1, \ldots, x_n$ определяется как

$$\sigma^{\text{обр}}_{n-1,\,n} = \left[\left(\frac{\partial \frac{f_n(u_1, \ldots, u_{n-1}, 1)}{f_{n-1}(u_1, \ldots, u_{n-1}, 1)}}{\partial u_{n-1}} \Bigg| \frac{f_n/f_{n-1}}{u_{n-1}}\right)\left(\frac{x_1}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right)\right]^{-1}. \qquad (1.65)$$

Переход к любому заданному набору отношений $u_i = \frac{x_{a_i}}{x_{b_i}}$, $i = 1, \ldots, n-2$, может быть легко выполнен, если учесть, что любое отношение $\frac{x_{a_i}}{x_{b_i}}$ может быть записано в виде $\frac{x_{a_i}}{x_{b_i}} = \frac{x_{a_i}}{x_n} \Big/ \frac{x_{b_i}}{x_n}$ и получено, следовательно, путем деления отношений $u_{a_i} = \frac{x_{a_i}}{x_n}$, $u_{b_i} = \frac{x_{b_i}}{x_n}$.

Прямая эластичность замены i-го фактора j-м для многофакторной функции вводится как обобщение определения (1.42) для двухфакторных функций. Обозначим через $p_1, \ldots, p_n$ новые переменные, связанные с $x_1, \ldots, x_n$ соотношениями

$$p_1 = \frac{f_1(x)}{f_i(x)}, \quad p_2 = \frac{f_2(x)}{f_i(x)}, \ldots, p_{i-1} = \frac{f_{i-1}(x)}{f_i(x)},$$

$$p_i = \frac{f_{i+1}(x)}{f_i(x)}, \ldots, p_{n-1} = \frac{f_n(x)}{f_i(x)}, \quad p_n = f(x).$$

Теперь

$$\frac{f_j}{f_i} = \begin{cases} p_i, \text{ если } i > j; \\ p_{i-1}, \text{ если } i < j. \end{cases}$$

Ниже мы убедимся в том, что это преобразование является невырожденным и имеет, следовательно, обратное. С его помощью каждый из аргументов $x_1, \ldots, x_n$ можно выразить как функцию от $p_1, \ldots, p_n$: $x_i = x_i(p)$, $i = 1, \ldots, n$.

Прямая эластичность замены i-го фактора j-м в точке $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ определяется как частная логарифмическая производная отношения i-го фактора к j-му по переменной $p_j = \frac{f_j}{f_i}$, вычисленная в точке $p^0 = p(x^0)$:

$$\sigma_{ij}^{\text{пр}}(x^0) =$$

$$= \begin{cases} \left(\dfrac{\partial \dfrac{x_i(p)}{x_j(p)}}{\partial p_j}\right)\Bigg|\left(\dfrac{x_i(p)/x_j(p)}{p_j}\right)\left(\dfrac{f_1(x^0)}{f_i(x^0)}, \ldots, \dfrac{f_n(x^0)}{f_i(x^0)}, f(x^0)\right), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{если } i > j; \\ \left(\dfrac{\partial \dfrac{x_i(p)}{x_j(p)}}{\partial p_{j-1}}\right)\Bigg|\left(\dfrac{x_i(p)/x_j(p)}{p_{j-1}}\right)\left(\dfrac{f_1(x^0)}{f_i(x^0)}, \ldots, \dfrac{f_n(x^0)}{f_i(x^0)}, f(x^0)\right), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{если } i < j. \end{cases} \tag{1.66}$$

Величина $\sigma_{ij}^{\text{пр}}(x^0)$ показывает, на сколько пунктов должно измениться соотношение i-го и j-го факторов при изменении предельной нормы замены на один пункт в условиях, когда предельные нормы замены i-го фактора остальными и значение функции остаются неизменными.

Геометрическая иллюстрация понятия прямой эластичности замены факторов, так же как и обратной, основана на интерпретации x_i^0/x_j^0 как тангенса угла между проекцией радиуса-вектора точки x^0 на плоскость $\{x_i, x_j\}$ и предельной нормы замены f_j/f_i как тангенса угла касательной к изокванте в точке x^0, взятой при $x_k = x_k^0$, $k = 1, \ldots, n$, $k \neq i, j$.

В сокращенной записи определение прямой эластичности замены i-го фактора j-м выглядит так:

$$\sigma_{ij}^{\text{пр}} = \frac{\partial \dfrac{x_i}{x_j}}{\partial \dfrac{f_j}{f_i}}\Bigg|\frac{x_i/x_j}{f_j/f_i} \text{ при } f(x) = \text{const}, \frac{f_k}{f_i} = \text{const}, \tag{1.67}$$
$$k = 1, \ldots, n, \ k \neq i, j.$$

Рабочая формула для вычисления $\sigma_{ij}^{\text{пр}}$ имеет вид

$$\sigma_{ij}^{\text{пр}}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{f_j}{H}\left(\frac{H_{ij}}{x_i} - \frac{H_{jj}}{x_j}\right), \qquad (1.68)$$

где

$$\mathbf{H} = \begin{vmatrix} 0 & f_1 & & f_n \\ f_1 & f_{11} & \ldots & f_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_n & f_{1n} & \ldots & f_{nn} \end{vmatrix},$$

H_{ij} — алгебраическое дополнение к элементу f_{ij} матрицы $\mathbf{H}$.

В качестве примера найдем прямую эластичность замены второго фактора третьим для функции $y = x_1x_2 + x_3$. В данном случае $H = 1$, $H_{23} = x_2$, $H_{33} = -2x_1x_2$. Следовательно,

$$\sigma_{23}^{\text{пр}} = \frac{2x_1\, x_2 + x_3}{x_3}.$$

Прямая эластичность замены третьего фактора вторым в этой функции имеет другой вид:

$$\sigma_{32}^{\text{пр}} = \frac{f_2}{H}\left(\frac{H_{32}}{x_3} - \frac{H_{22}}{x_2}\right) = x_1\left(\frac{x_2}{x_3}\right) = \frac{x_1\, x_2}{x_3} \neq \sigma_{23}^{\text{пр}}.$$

Следовательно, определение прямой эластичности замены факторов несимметрично. Вместе с тем эластичности замены первого фактора вторым и второго фактора первым равны единице:

$$\sigma_{12}^{\text{пр}} = \frac{x_1}{1} \cdot \frac{1}{x_1} = 1 = \sigma_{21}^{\text{пр}}.$$

Если $f(x)$ — однородная функция, то определение прямой эластичности замены факторов можно упростить. В этом случае отношения частных производных $\frac{f_k(x)}{f_i(x)}$, $k = 1, \ldots, \ldots, n$, $k \neq i, j$, можно рассматривать как функцию от отношений переменных x_i/x_k, $k = 1, \ldots, n$, $k \neq i$ и (при определенных условиях) выразить эти отношения через новые переменные, $p_1, \ldots, p_{n-1}$, разрешая систему уравнения $f_k/f_i = p_k$, $k = 1, \ldots, n$, $k \neq i, j$, относительно x_i/x_k. Следовательно, отношение x_i/x_j в случае однородной функции f зависит только от $p_1, \ldots, p_{n-1}$ и не зависит от p_n при любых $i \neq j$. В сокращенной записи определения прямой эластичности замены факторов (1.67) для однородных функций условие $f(x) = \text{const}$ можно опустить.

Так же как и при определении обратной эластичности замены факторов, обязательными в составе аргументов $p_1, \ldots, p_n$ функции $x_i(p)/x_j(p)$ являются лишь аргументы,

выражающие интересующую нас предельную норму замены f_j/f_i и объем выпуска $p_n = f(x)$. В качестве остальных аргументов может быть выбран любой набор из $(n-2)$-х отношений f_{a_i}/f_{b_i}, в котором каждая из функций, кроме f_j и f_i, встречается хотя бы один раз. При этом фиксированные предельные нормы замены должны явным образом указываться в определении прямой эластичности замены факторов.

Сделаем еще одно замечание о симметричности σ_{ij} относительно перестановки факторов. Определения обратной и прямой эластичностей замены факторов, как мы видим, не являются симметричными по отношению к перестановке факторов, в общем случае $\sigma_{ij}^{обр} \neq \sigma_{ij}^{обр}$, $\sigma_{ij}^{пр} \neq \sigma_{ji}^{пр}$. Заметим, однако, что состав неизменных отношений факторов для обоих определений зависел от того, какой из факторов идет первым, а какой — вторым. Можно модифицировать определения $\sigma_{ij}^{обр}$ и $\sigma_{ij}^{пр}$ таким образом, чтобы значение эластичности замены при перестановке i-го и j-го факторов сохранялось. Для этого следует «вынести за скобки» в определении σ_{ij} перечень неизменяемых переменных (кроме переменной, выражающей значение функции): $\sigma_{ij}^{обр}$ следует определять не как «эластичность замены i-го фактора j-м», а как «эластичность замены i-го фактора j-м в условиях постоянства заданной системы отношений x_{a_k}/x_{b_k}, $k = 1, \ldots, \ldots, n-2$, $a_k \neq i, j$, $b_k \neq i, j$».

Р. Аллен предложил [70] одно из наиболее известных определений понятия эластичности замены факторов для многофакторной производственной функции. Эластичность замены i-го фактора j-м по Аллену определяется как

$$\sigma_{ij}^{A}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{x_1 f_1 + \ldots + x_n f_n}{x_i x_j} \cdot \frac{H_{ij}}{H}.$$

Это определение обобщает формулу (1.60) для вычисления эластичности замены факторов двухфакторной функции. Действительно, при $n = 2$ $H = 2f_1f_2f_{12} - f_1^2f_{22} - f_2^2f_{11}$, $H_{12} = f_1f_2$, откуда $\sigma^A = \sigma_{12}$.

Ввиду симметричности матрицы **H** имеет место равенство $\sigma_{ij}^{A} = \sigma_{ji}^{A}$. Интерпретация этого показателя, приведенная Алленом, опирается на включение производственной функции $y = f(x)$ в более широкую и весьма условную модель, связывающую цены на факторы и товар, спрос на продукцию и ее производство. Ниже приводится независимая интерпретация σ_{ij}^{A}, основанная на связи σ_{ij}^{A} и $\sigma_{ij}^{пр}$.

Поскольку

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_{j-1}} = \frac{\partial x_i}{\partial\left(\frac{f_j}{f_i}\right)} = \frac{f_i H_{ij}}{H}, \tag{1.69}$$

то

$$\left.\frac{\partial \ln x_i}{\partial \ln \frac{f_j}{f_i}}\right|_{\frac{f_h}{f_i}=\text{const},\ f=\text{const}} = \frac{x_j f_j}{\sum\limits_{j=1}^{n} x_j f_j}\,\sigma_{ij}^{\text{A}}. \tag{1.70}$$

Обозначим отношение $\frac{x_j f_j}{\sum\limits_{j=1}^{n} x_j f_j}$ через $r_j(x)$. Из равенства (1.62) вытекает следующее истолкование многофакторной пластичности замены факторов по Аллену: с точностью до множителя $r_j(x)$ величина σ_{ij}^{A} показывает, на сколько процентов придется увеличить количество ресурса x_i, чтобы сохранить неизменными выпуск и предельные нормы замены остальных факторов i-м в условиях, когда предельная норма замены j-го фактора i-м уменьшилась на один процент.

Аналогичным образом интерпретируется показатель σ_{jj}^{A}: с точностью до множителя $r_j(x)$ величина σ_{jj}^{A} показывает, на сколько процентов придется увеличить объем x_j, чтобы при уменьшении соотношения между предельными производительностями j-го и i-го ресурсов на один процент выпуск и предельные нормы замены остальных факторов i-м остались неизменными.

Соотношение между прямой эластичностью замены и эластичностью замены факторов по Аллену раскрывается в следующей формуле, вытекающей из (1.70) при $k = i$ и $k = j$:

$$\sigma_{ij}^{\text{пр}}(x) = r_j(x)\left(\sigma_{ij}^{\text{A}}(x) - \sigma_{jj}^{\text{A}}(x)\right). \tag{1.71}$$

Может показаться, что эта формула не согласуется с равенством между прямой и алленовской эластичностями замены факторов при $n = 2$. Здесь, однако, противоречия нет. Заметим сначала, что заменяя i-ю строку определителя матрицы **H** его первой строкой и разлагая по ней получившийся нулевой определитель, приходим к следующему соотношению между величинами $H_{i1}, \ldots, H_{in}$:

$$f_1 H_{i1} + \ldots + f_n H_{in} = 0.$$

Отсюда вытекает соотношение между величинами σ_{ik}^{A}, $k = 1, \ldots, n$:

$$r_1 \sigma_{i1}^{A} + \ldots + r_n \sigma_{in}^{A} = 0.$$

При $n = 2$ это означает, что $\sigma_{22}^{A} = -\frac{r_1}{r_2} \sigma_{12}^{A}$. Следовательно, при $n = 2$ правая часть равенства (1.71) запишется в виде

$$r_2 (\sigma_{12}^{A} - \sigma_{22}^{A}) = r_2 \left(\sigma_{12}^{A} + \frac{r_1}{r_2} \sigma_{12}^{A} \right) = (r_1 + r_2) \sigma_{12}^{A} = \sigma_{12}^{A}.$$

Наконец, обобщением на случай произвольного числа факторов понятия эластичности замены факторов по Михалевскому является следующее определение:

$$\sigma_{ij}^{M} (x_1, \ldots, x_n, \mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}\, x_n) = \frac{\dfrac{f_j}{f_i} \mathrm{d} \dfrac{x_i}{x_j}}{\dfrac{x_i}{x_j} \mathrm{d} \dfrac{f_j(x)}{f_i(x)}},$$

где в числитель и знаменатель входят полные дифференциалы соответствующих функций.

Величина σ_{ij}^{M} показывает соотношение между процентным изменением отношения i-го и j-го факторов и процентным изменением предельной нормы замены при переходе от точки $(x_1, \ldots, x_n)$ к близкой точке $(x_1 + \mathrm{d}x_1, \ldots, x_n + \mathrm{d}x_n)$. Фактически функция σ_{ij}^{M} зависит от $x_1, \ldots, x_n$ и соотношения между $\mathrm{d}x_i$; в частности, ее можно рассматривать как функцию от переменных $x_1, \ldots, x_n$ и отношений дифференциалов $\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}x_i}, \ldots, \frac{\mathrm{d}x_{i-1}}{\mathrm{d}x_i}, \frac{\mathrm{d}x_{i+1}}{\mathrm{d}x_i}, \ldots, \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}x_i}$. Если f — однородная функция, то число аргументов функции σ_{ij}^{M} уменьшается еще на единицу: σ_{ij}^{M} зависит только от соотношений между $x_1, \ldots, x_n$ и соотношений между $\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_n$.

Связи между σ_{ij}^{M} и σ_{ij}^{A} возможны, если σ_{ij}^{M} не зависит от $\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_n$. В этом случае $\sigma_{ij}^{M} = \sigma_{ij}^{A} = \sigma_{ij}^{пр} = \sigma_{ij}^{обр}$.

Формула для вычисления эластичности замены факторов по Михалевскому имеет вид

$$\sigma_{ij}^{M} (x_1, \ldots, x_n, \mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_n) =$$

$$= \frac{f_i f_j \left(-\dfrac{\mathrm{d}\, x_i}{x_i} + \dfrac{\mathrm{d}\, x_j}{x_j} \right)}{(f_{i1} f_j - f_{j1} f_i)\, \mathrm{d}\, x_1 + \ldots + (f_{in} f_j - f_{jn} f_i)\, \mathrm{d}\, x_n}.$$

Несмотря на то что в отличие от случая двух факторов все приведенные определения эластичности замены факторов различны, легко убедиться, что нулевую эластичность замены между любыми двумя факторами по всем определениям имеет функция Леонтьева, эластичность замены, равную единице,— функция Кобба—Дугласа, а бесконечно большую эластичность замены — линейная функция.

Формулировка понятий парной эластичности замены факторов позволяет исследовать также групповую взаимозаменяемость аргументов функции. Переход от пар к группам осуществляется путем объединения некоторых переменных в группы, обозначаемые одной буквой, и представления функции в виде функции от новых, агрегированных переменных. Пусть дана функция $y = f(x_1, \ldots, x_n)$. Подмножество переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ образует группу, если функцию f можно представить в виде суперпозиции функции $z_1 = g(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ от k переменных и функции $z_2 = h(z_1, x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n-k}})$ от новой переменной z_1 и остальных $n - k$ переменных, где $\{x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n-k}}\} \cup \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\} = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Например, функцию $y = x_1x_2 + x_3$ можно представить в виде суперпозиции функций $z_1 = x_1 x_2$ и $z_2 = z_1 + x_3$.

Предположим, что все аргументы $x_1, \ldots, x_n$ функции f разбили на S групп, так что функция f оказалась представленной в виде суперпозиции функции h от S переменных и функций $z_1, \ldots, z_S$:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = h(z_1, \ldots, z_S),$$

где z_i — функция от i-й группы переменных $X_i = \{x_{\alpha_1^i}, x_{\alpha_2^i}, \ldots, x_{\alpha_{k(i)}^i}\}$, причем $X_i \cap X_j = \varnothing$. Тогда групповой эластичностью замены факторов $x_{\alpha_1^i}, \ldots, x_{\alpha_{k(i)}^i}$ и $x_{\alpha_1^j}, \ldots, x_{\alpha_{k(j)}^j}$ функции f называется парная эластичность замены σ_{ij} между i-й и j-й переменными z_i, z_j в функции h. Так, групповая эластичность замены факторов x_1, x_2, с одной стороны, и x_3 — с другой, в функции $y = x_1x_2 + x_3$ равна бесконечности. Дальнейшие сведения о связи групповой эластичности замены с эластичностями замены внутри групп для функций определенного вида можно найти в [77].

Глава 2

МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

2.1. ОСНОВНЫЕ ЭТАПЫ ПОСТРОЕНИЯ

2.1.1. Общая характеристика процесса построения

Понятие производственной функции данного объекта как функции, которая вместе с областью определения наилучшим образом аппроксимирует агрегированную экономическую технологию τ, определяет строгую последовательность действий, необходимых для построения производственной функции.

Поскольку производственная функция получается в результате реализации вычислительного метода оптимизации V, последним этапом ее построения является применение этого алгоритма. Предварительно необходимо сформулировать принципы перебора и сравнения пробных функций и их областей определения, т. е. выбрать бинарное отношение ρ_τ на множестве вычислимых функций. Выбор этого отношения играет определяющую роль при построении производственной функции, поскольку в него входит и определение вида функции, и формирование принципов оценки параметров. Для его правильного выбора необходимо собрать, обработать и использовать обширную информацию о производственном процессе и влиянии на него внешних условий, сформулировать цели и задачи, для решения которых строится производственная функция, проанализировать возможности существования и свойства экономико-технологической функции τ. Предварительно фиксируется система показателей оценки ресурсов и выпуска (μ, ν). Все это требует проведения тщательного экономического и системного анализа моделируемого объекта или процесса. Выделяются следующие этапы построения производственной функции.

Этап 1. Формулировка целей построения производственной функции.

Этап 2. Системный анализ моделируемого объекта.

Этап 3. Экономический качественный анализ объекта.

Этап 4. Определение системы показателей производственной функции (показателей μ, ν).

Этап 5. Формирование информационной базы для анализа технологии и построения производственной функции.

Этап 6. Анализ существования и свойств экономической технологии τ.

Этап 7. Определение принципов сравнения функций по их близости к τ (формирование отношения $\rho = \rho_\tau$).

Этап 8. Определение вычислительного алгоритма V для оптимизации отношения ρ_τ.

Этап 9. Подготовка программного обеспечения алгоритма.

Этап 10. Расчет производственной функции и ее области определения.

Ниже рассматриваются исходные и выходные данные каждого этапа и определяется схема их информационного взаимодействия.

2.1.2. Формирование информационной базы для построения производственной функции (этапы 1—5)

Создание информационной базы производственной функции является итогом выполнения первых пяти этапов ее построения. Последующие пять этапов реализуют методы переработки этой информации.

Исходной информацией для этапа 1 является экономическая постановка задачи. В данном случае задача может относиться к одному из трех основных направлений планово-экономической работы — планированию, прогнозированию, экономическому анализу. Так, если речь идет о прогнозе развития отрасли народного хозяйства, указываются период прогноза, варианты исходных предпосылок, уровень описания отрасли или система показателей, степень точности и условия использования прогноза. Выходной информацией первого этапа построения производственной функции являются: а) желательная система показателей-аргументов и значений производственной функции; б) ее желательная область определения; в) требования, предъявляемые к степени адекватности построения производственной функции; г) условия применения (будет ли применяться непосредственно производственная функция или одна из производных зависимостей, предполагается ли использовать ее автономно или в составе других экономико-математических моделей и т. д.). Структура входной и выходной информации этапа 1 построения производственной функции представлена на рис. 2.1.

Рис. 2.1

Цель этапа 2 состоит в выявлении и анализе связей моделируемого объекта с внешней средой, а также внутренних связей между показателями ресурсов и выпуска. Для правильного отражения функционирования объекта необходимо точно знать его функции, т. е. те требования, которые предъявляет к нему народное хозяйство и для реализации которых он предназначен.

Построение производственной функции предполагает, что функционирование производственного процесса можно представить в виде автомата, определив показатели входа, состояния и выхода системы (см. п. 1.2.3). Анализ возможностей и реализация такого представления также входят в задачу данного этапа.

Важной частью системного анализа объекта является анализ его структуры, выявление степени самостоятельности отдельных единиц, входящих в него. Эти результаты используются на третьем этапе для формирования данных о системе управления ресурсами.

Каждый народнохозяйственный объект имеет собственные внутренние целевые установки, реализация которых подчинена общим целям развития народного хозяйства, но имеет свою специфику в зависимости от специфики социально-экономического статуса предприятия. Выявление таких целей необходимо для правильного отражения функционирования объекта. Система целей также используется на третьем этапе.

Исходными данными для второго этапа служат результаты опроса экспертов (руководителей предприятия), норма-

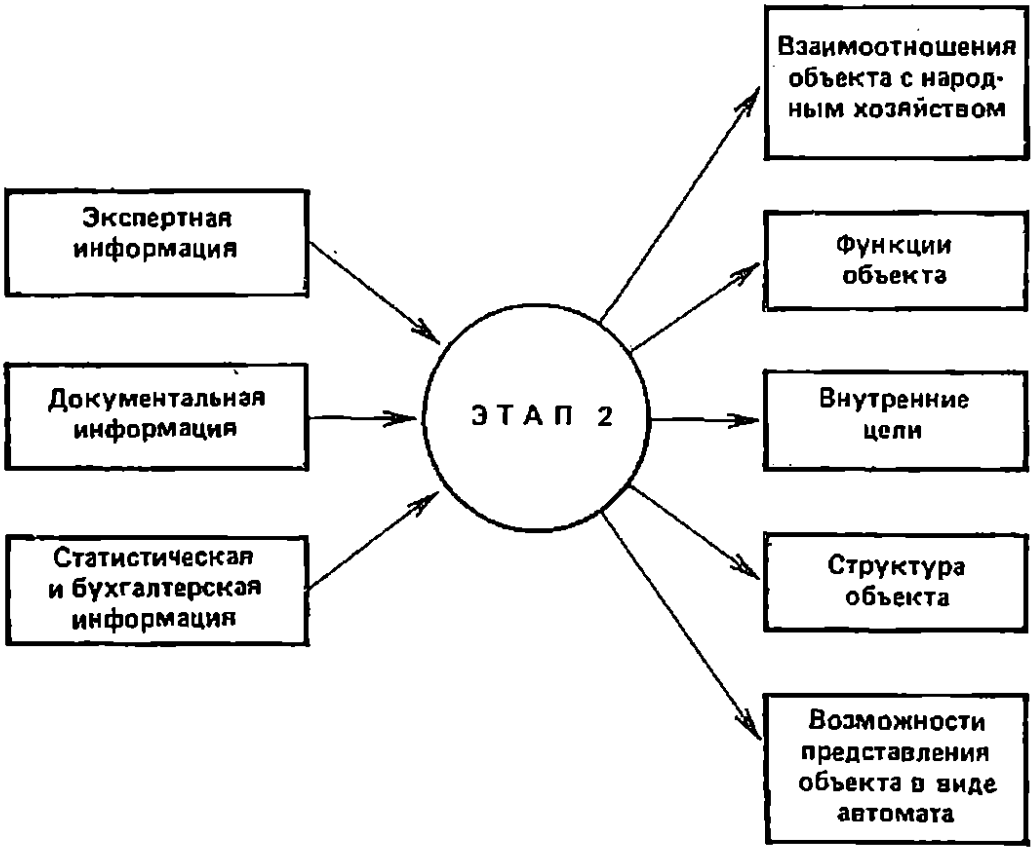


Рис. 2.2

тивные акты, бухгалтерская и статистическая отчетность. Структура входной и выходной информации этапа 2 отражена на рис. 2.2.

На этапе 3 производится технико-экономический анализ условий функционирования непосредственно производственного процесса. Этот анализ основывается на данных системных исследований, полученных на предыдущем этапе, а также на использовании имеющейся информации о технологии, экономических и организационных условиях протекания производственного процесса. В результате проведения этого этапа определяется уточненный список факторов, наиболее существенно влияющих на динамику объема выпуска, что вместе с данными системного анализа позволяет сформировать систему показателей производственной функции (этап 4). На основе данных, относящихся к технологии самого производственного процесса, вырабатываются сведения о его технико-экономических характеристиках, анализируется динамика роста эффективности использования ресурсов и организация их распределения и использования. В целом данный этап является решающим при формировании информационной базы для построения производственной функции. Его входная и выходная информация отражена на рис. 2.3.

Рис. 2.3

В результате проведения этапа 4 формируется система показателей производственной функции. Устанавливаются число и состав ее аргументов $x_1, \ldots, x_n$, интерпретация значений выходного объемного показателя y. Основанием для выбора той или иной системы показателей является, во-первых, целевая установка моделирования, во-вторых, определенный в результате системного и экономического анализа функционирования объекта перечень факторов, влияющих на объемные результаты производства. Здесь определяются (на качественном уровне) специфические для данного предприятия факторы роста производительности труда и оборудования, наличие диспропорций в обеспечении

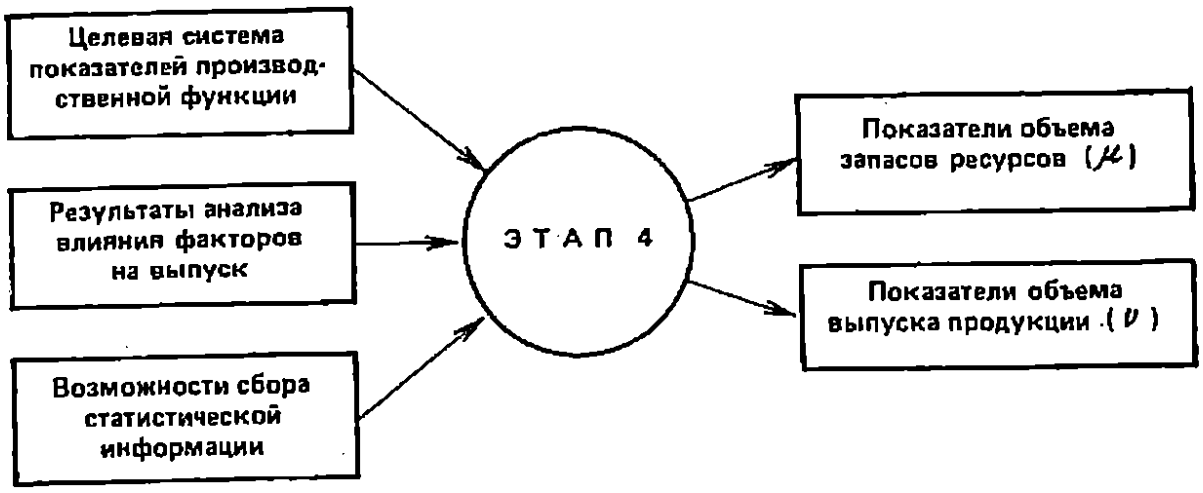


Рис. 2.4

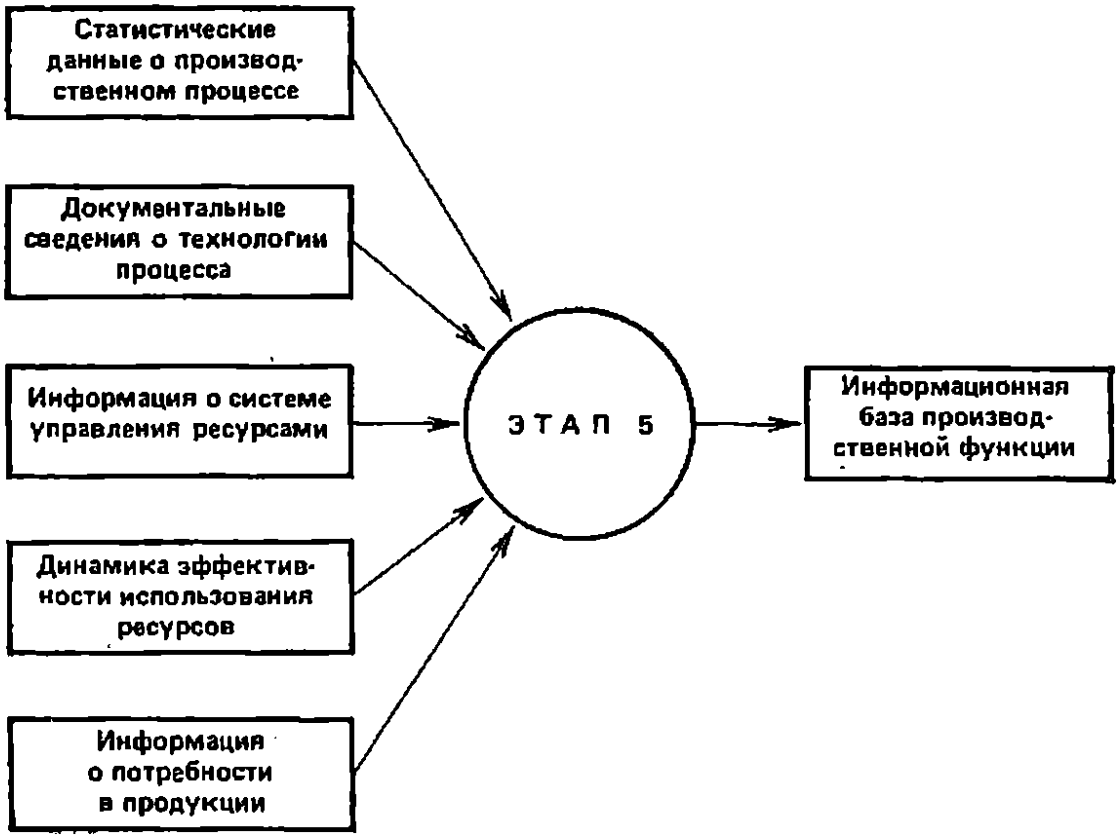


Рис. 2.5

ресурсами, резервы роста производства. Все эти сведения определяют степень и структуру дезагрегирования основных групповых аргументов производственной функции — труда, средств труда и предметов труда (рис. 2.4).

Наконец, важным ограничивающим фактором для разработки системы показателей-аргументов производственной функции являются возможности формирования статистической базы. По некоторым видам средств и предметов труда, возможно, отсутствуют статистические данные за ряд лет. Это мешает включать соответствующие показатели в список аргументов производственной функции.

Выбор выходного показателя производственной функции — объема выпуска — в решающей мере зависит от двух обстоятельств: цели построения функции и возможностей сбора достоверных статистических данных. Так, если предполагается прогнозировать объем выпуска нормативной чистой продукции (НЧП), то для получения устойчивой производственной функции необходимо провести предварительную работу по расчету объема НЧП за ретроспективный период.

Информационная база построения производственной функции складывается из следующих составляющих, полученных на основе системного и экономического анализа

объекта: а) статистические данные о протекании производственного процесса; б) сведения об особенностях технологии производства; в) информация о системе и принципах распределения ресурсов, организационных ограничениях на возможности пополнения и перераспределения ресурсов; г) сведения о предполагаемом изменении производительности ресурсов; д) информация о внешних связях моделируемого объекта (потребность в его продукции, возможности снабжения ресурсами). Все эти данные должны по возможности охватывать как можно больший промежуток времени, а также снабжаться характеристиками достоверности. На этапе 5 вся информация суммируется, обобщается и ранжируется по степени значимости и достоверности (рис. 2.5).

2.1.3. Методы определения вида и параметров производственной функции (этапы 6—10)

Следующие пять этапов предназначены для определения вида и вычисления параметров производственной функции и ее области определения.

Исходной информацией для анализа свойств и характеристик агрегированной экономической технологии τ (этап 6) являются все данные, полученные в результате выполнения предыдущих этапов и сведенные в информационную базу на этапе 5. Выходная информация этапа 6 включает: а) сведения о существовании для данной системы показа-

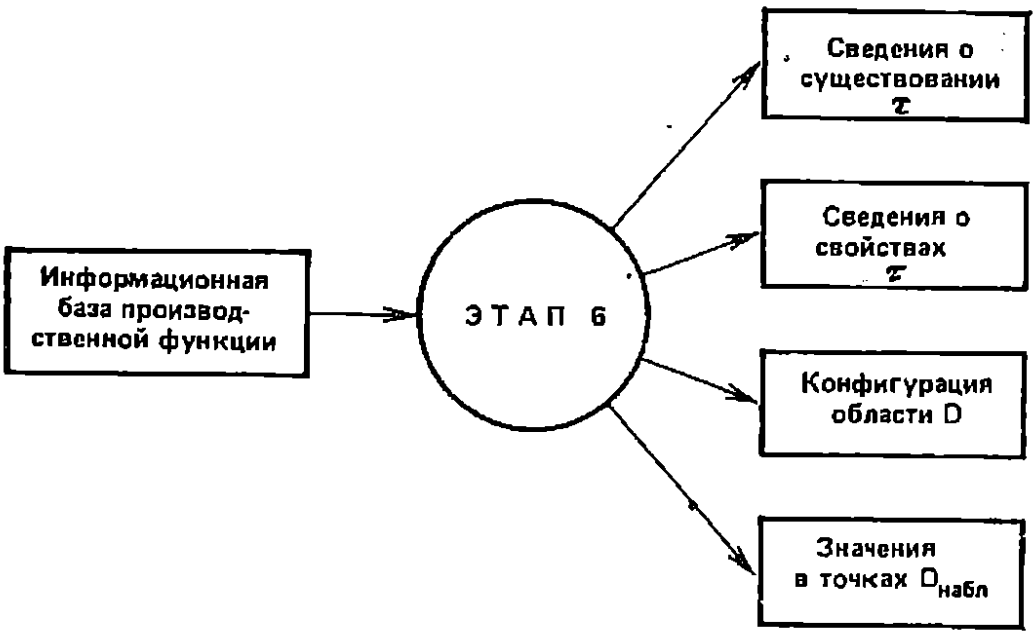


Рис. 2.6

телей μ, ν агрегированной экономической технологии τ; б) характеристики и конфигурацию области определения функции τ; в) качественную информацию о поведении функции τ в различных участках пространства ресурсов; г) значения функции τ в точках множества $D_{набл}$ (рис. 2.6).

На этапе 7 осуществляется переход от экономико-технологической функции τ к производственной функции f, определенной с точностью до числовых параметров(см. п. 2.2—2.4). В результате выполнения этого этапа определяется вид производственной функции и конфигурация ее области определения, а также формируются принципы сравнения функций и их областей определения по степени приближения к функции τ и ее области определения D. Если предыдущие этапы носили подготовительный характер, то на этапе 7 вся собранная информация должна перейти в конкретные характеристики функций из данного класса и их областей определения. Все характеристики агрегированной технологии должны быть переформулированы в терминах поведения функций из класса F. То же самое осуществляется и в отношении областей определения.

Исходные данные для этого этапа складываются из трех частей. Информация, относящаяся к целям моделирования, характеризует желательную область определения $M_ц$ производственной функции и (совместно с результатами экономического анализа) требования к качеству аппроксимации функции τ. Вторая часть исходной информации касается характеристик и свойств функции τ. Эти свойства в результате проведения этапа должны быть преобразованы в свойства класса F, из которого будет выбираться производственная функция, и отношения ρ для сравнения функций из F. Для этого необходимо знать, какими свойствами обладают различные параметрические классы функций, параметрические классы областей в n-мерном пространстве, а также различные варианты методов сравнения их между собой. Наконец, при выборе вида функции, ее области определения и оценки их параметров следует учесть возможные ограничения на методы реализации вычислительных алгоритмов. Так, если в распоряжении исследователя имеются лишь алгоритмы и программы оценки коэффициентов линейных регрессионных уравнений по методу наименьших квадратов, то это существенно сужает возможности выбора вида функций. Входная и выходная информация этапа отражена на рис. 2.7.

Следующий этап состоит в создании или подборе алгоритма поиска экстремального элемента отношения ρ_τ. Если ρ_τ — критериальное отношение (см. п. 1.2.6), то задача сво-

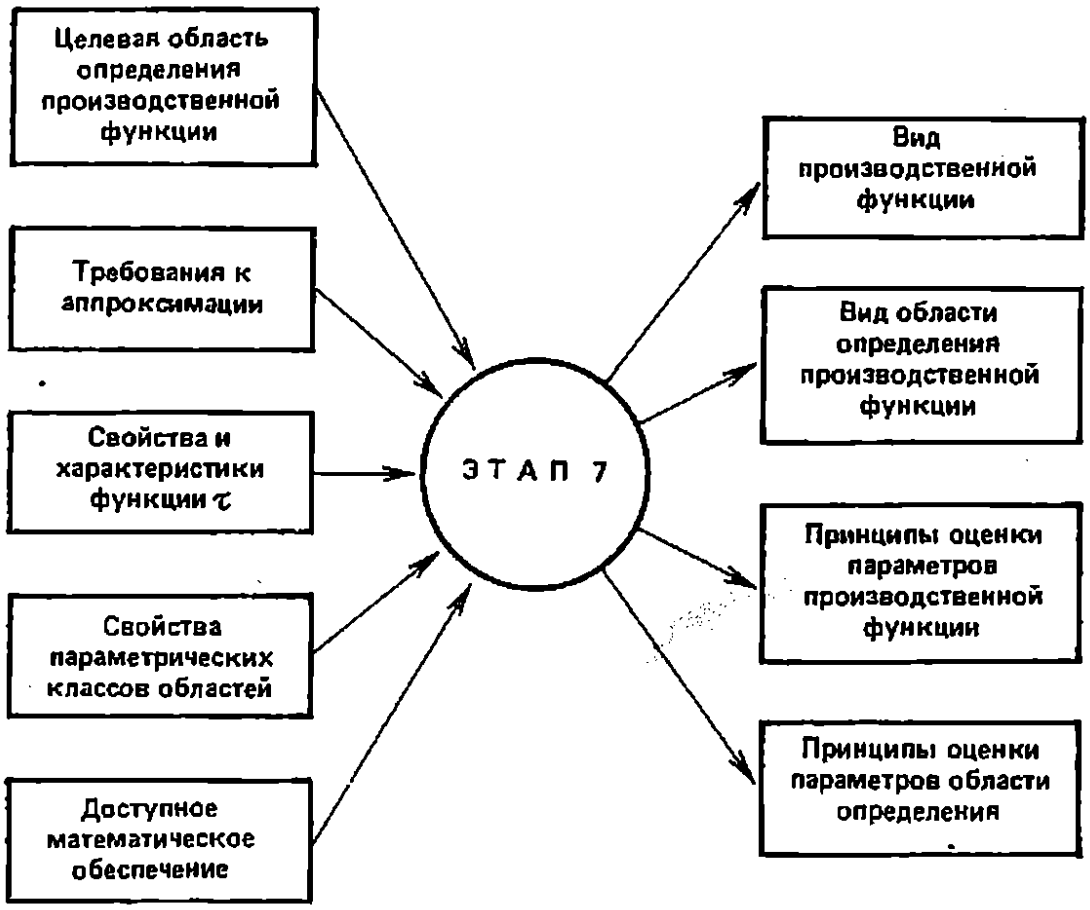


Рис. 2.7

дится к оптимизации критериальной функции. В зависимости от вида производственной функции эта функция (например, сумма квадратов отклонений) может быть многоэкстремальной, иметь весьма сложный рельеф. Поэтому для разработки эффективного алгоритма целесообразно было бы в рамках этого этапа провести исследование оптимизационных свойств критериальной функции и подобрать алгоритм, предназначенный непосредственно для оптимизации функций данного класса.

Исходная информация для выполнения этапа состоит из отношения ρ_τ, сведений об имеющихся алгоритмах оптимизации, их особенностях и сфере использования. В качестве ограничения выступают параметры ЭВМ, на которой предполагается реализовать алгоритм — объём памяти, быстродействие и т. д.

Результатом этапа 8 является подготовленный к использованию алгоритм V проведения расчетов (рис. 2.8).

На этапе 9 подготавливается (адаптируется или создается специально) программа, реализующая алгоритм V (рис. 2.9). В дополнение к данным о методе V, особенностях ЭВМ, для которой подготавливается программа, при ее

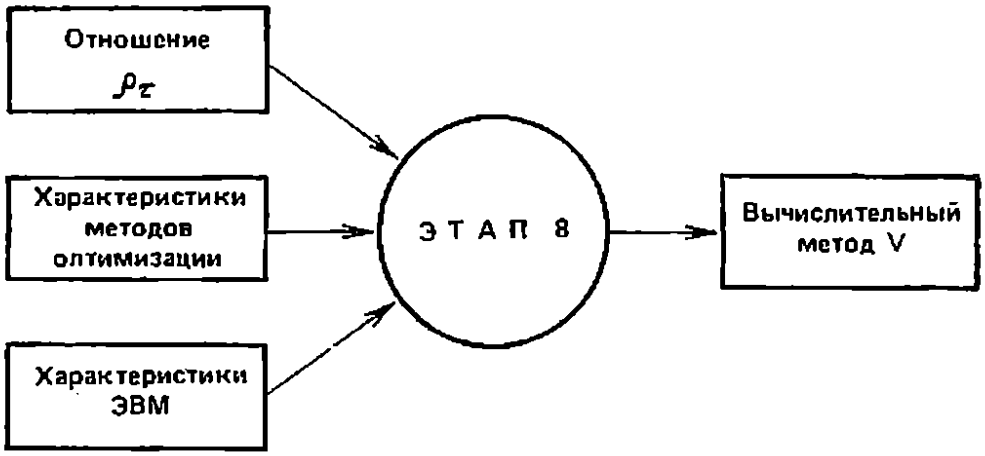


Рис. 2.8

составлении должны учитываться характеристики (в частности, объем) статистической части информационной базы расчетов.

Завершающий этап 10 построения производственной функции состоит в проведении расчетов параметров производственной функции (и ее области определения) по статистическим и иным исходным данным с помощью подготовленной программы (рис. 2.10). Кроме указанных параметров интерес представляют характеристики достигнутой точности аппроксимации функции и ее области определения, а также (при массовых расчетах) длительности или трудности поиска экстремальных значений параметров.

Необходимо отметить, что приведенная последовательность этапов (рис. 2.11) является в каком-то смысле идеализацией. В реальных расчетах нередки случаи, когда приходится возвращаться к ранее пройденным этапам, корректировать те или иные предпосылки моделирования, расширять или сокращать его информационную базу. Если же

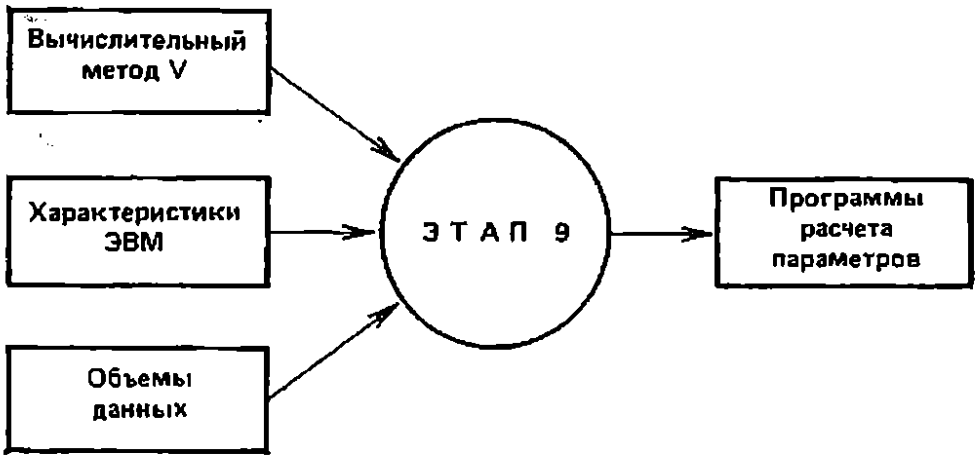


Рис. 2.9

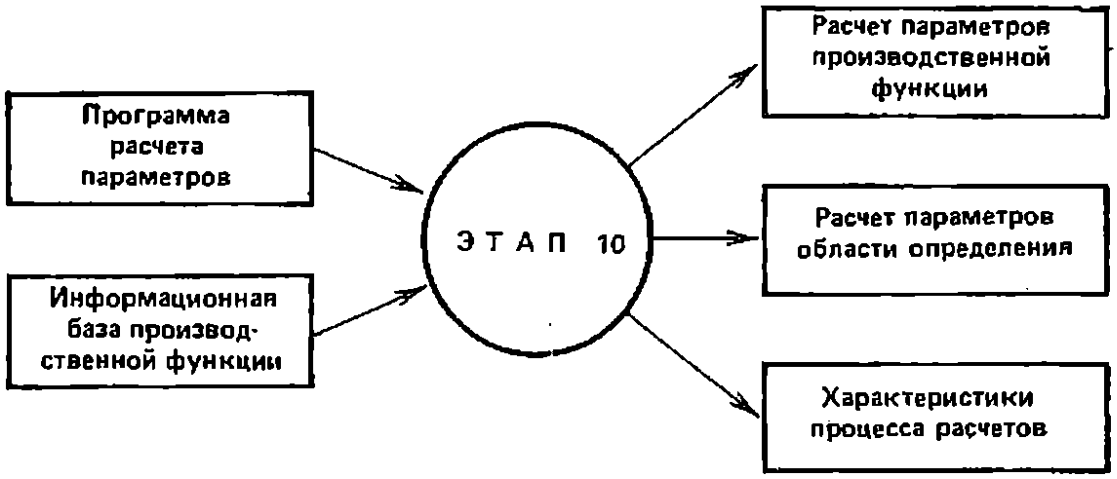


Рис. 2.10

все возможности такого рода исчерпаны, а построить производственную функцию данного объекта, удовлетворяющую максимально ослабленным требованиям, не удается, можно рекомендовать такую «крайнюю» меру, как смена объекта моделирования. Предположим, например, что таким объектом первоначально является некоторое промышленное объединение, состоящее из десяти структурных единиц более низкого организационного уровня (производственных и научно-производственных объединений). Пусть в ходе экономического анализа объекта (этап 3) выяснилось, что агрегированная технология для данной системы показателей ресурсов и выпуска нестабильна. Тогда целесообразно вернуться к этапу 2 и более детально рассмотреть функционирование отдельных ПО и НПО, входящих в ВПО. Если при этом обнаружится, что неустойчивость общей технологии обусловлена работой двух ПО, в то время как остальные образуют технологически однородную группу, то в качестве нового объекта для построения производственной функции можно рассмотреть систему, состоящую из этих восьми относительно однородных производственных и научно-про-

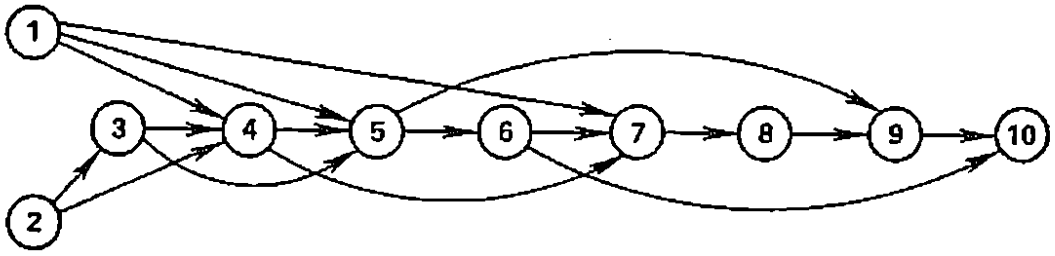


Рис. 2.11

изводственных единиц. В этом случае процесс моделирования снова начинается с этапа 1. Проблема выделения таких технологически однородных единиц и формирования соответствующих подсистем рассмотрена в [44].

2.2. ВИДЫ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

2.2.1. Двухфакторные производственные функции

Пусть Φ_n — множество всех функций от n переменных, определенных на некоторой области M пространства R^n. Подмножество $F \subset \Phi_n$ называется *параметрическим* (точнее, k-параметрическим), если существуют подмножество $A_k \subset R^k$ и отображение p: $A_k \to \Phi_n$, такие, что $p(A_k) = F$. В k-параметрическом классе F каждая функция $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) \in F$ полностью определяется вектором параметров $a = (a_1, \ldots, a_k)$ и может записываться как $f_a(x)$. Смысл параметризации некоторого множества функций по существу аналогичен введению системы координат, с помощью которой каждая функция из этого множества отождествляется с последовательностью своих координат. Параметризацию допускают лишь не слишком широкие множества F, в частности множество Φ_n не может быть k-параметрическим ни при каком конечном k. Если отображение p линейно, т. е. $p(a' + a'') = p(a') + p(a'')$, a', $a'' \in A_k$, то класс F образуют функции, *линейные по параметрам*.

Что же общего могут иметь функции f, принадлежащие какому-либо параметрическому множеству F? Предположим, что все функции $f \in F$ дифференцируемы до второго порядка включительно, а множество A_k совпадает с R^k. Соотношения $y = f_a(x)$, $\frac{\partial y}{\partial x_i} = \frac{\partial f_a}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f_a}{\partial x_i \partial x_j}$ рассмотрим как систему из $n + 1 + \frac{n(n+1)}{2}$ уравнений относительно k параметров $a_1, \ldots, a_k$. Число параметров k обычно имеет тот же порядок, что и число переменных n, поэтому в большинстве случаев параметры $a_1, \ldots, a_k$ можно выразить как функции от $x_1, \ldots, x_n, y, \frac{\partial y}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j}$, используя k из уравнений этой системы. Подставляя полученные выражения в оставшиеся уравнения, можно получить систему дифференциальных уравнений относительно функции f, уже не содержащую параметров. Часто таким способом удается добиться того, чтобы множество решений полученной системы

уравнений относительно функции f совпадало с F, т. е. F был общим интегралом системы. Именно то, что функции из класса удовлетворяют этой системе дифференциальных уравнений с частными производными, и является объединяющим их свойством. Это обстоятельство в большом числе случаев дает ключ к проблеме выбора вида производственной функции данного объекта. Система дифференциальных уравнений (наряду с частными производными по факторам при формировании таких систем используются также другие характеристики функции — средняя эффективность фактора, эластичность выпуска по фактору, предельная норма замены факторов и др.) связывает между собой в общем случае значения функции, ее аргументов и характеристик (в той же точке, что и значения функции). Информация, полученная на этапе качественного экономического анализа моделируемого объекта, часто позволяет принять или отвергнуть предположение о существовании такой связи.

Для каждого из приводимых ниже видов функций мы будем указывать одну или несколько систем условий на характеристики функций данного вида, однозначно выделяющих его среди других видов. Эти условия представляют собой либо соотношения между различными характеристиками функции, либо описание поведения отдельных характеристик в различных частях области определения. Выполнение этих условий следует рассматривать как предпосылки для выбора функции данного вида. Доказательства эквивалентности систем условий и принадлежности к функциям данного вида опускаются. Некоторые свойства приводимых ниже функций можно найти в [20, 27, 31, 11, 63]. Все функции $y = f_a(x_1, x_2)$, которые рассматриваются в этом пункте, непрерывны и либо сами являются дифференцируемыми, либо могут быть получены предельным переходом по параметрам из дифференцируемых.

В приводимом ниже списке видов функции они располагаются в порядке возрастания сложности их записи и соответственно увеличения числа необходимых для этого параметров. Все эти функции допускают модификации, отличающиеся от основного вида тем, что в них априорно фиксируются значения некоторых параметров или их комбинаций. Такая фиксация может быть вызвана либо наличием априорной информации о величине данных параметров, либо стремлением упростить процесс оценки параметров. Так, если функция однородная и степень ее однородности является оцениваемым параметром, то в качестве модификации основного вида может быть рассмотрен класс функций с предписанной заранее степенью однородности, скажем,

равной единице. Мы не будем выделять эти модификации в отдельные классы функций и специально указывать их.

1. Функция с фиксированными пропорциями факторов (*функция Леонтьева*)

$$y = \min\left(\frac{x_1}{a_1}, \frac{x_2}{a_2}\right). \tag{2.1}$$

Известно несколько альтернативных систем условий (предпосылок), выделяющих функции такого вида:

а) предельная производительность первого фактора является двухуровневой кусочно-постоянной невозрастающей функцией от отношения x_1/x_2 с нулевым нижним уровнем. Предельная производительность второго фактора — неубывающая кусочно-постоянная функция от x_1/x_2 с нулевым нижним уровнем;

б) функция представляет решение следующей задачи математического программирования:

$$\begin{cases} a_1 y \leqslant x_1 \\ a_2 y \leqslant x_2 \end{cases} y \to \max,$$

где y — оптимизируемая переменная;

в) функция однородна и эластичность замены факторов (по любому из приведенных определений) равна нулю;

г) функция может быть получена из функции с постоянной эластичностью замены вида

$$y = \left(\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{a_3} + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^{a_3}\right)^{1/a_3}$$

путем предельного перехода $a_3 \to -\infty$.

Функция Леонтьева предназначена для моделирования строго детерминированных технологий, не допускающих отклонения от технологических норм использования ресурсов на единицу продукции. Обычно используется для описания мелкомасштабных или полностью автоматизированных производственных объектов.

2. *Функция Кобба—Дугласа*

$$y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}. \tag{2.2}$$

Здесь также используется несколько систем предпосылок, выделяющих класс функций Кобба—Дугласа среди дважды дифференцируемых функций от двух переменных:

а) эластичности выпуска по факторам постоянны:

$$\chi_{21}^1 (x_1, x_2) = a_1;$$
$$\chi_{22}^1 (x_1, x_2) = a_3.$$

Решением этой системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка является класс функций Кобба—Дугласа;

б) эластичность функции по одному из факторов постоянна и функция является однородной:

$$\chi^1_{21}(x_1, x_2) = a_1;$$

$$\chi^1_{21}(x_1, x_2) + \chi^1_{22}(x_1, x_2) = a_1 + a_2;$$

в) функция однородна и эластичности замещения факторов по Аллену и Михалевскому равны единице

$$\sigma^A(x_1, x_2) = \sigma^M(dx_1, dx_2, x_1, x_2) = 1;$$

г) предельная производительность каждого фактора пропорциональна его средней производительности:

$$\chi^1_{11}(x_1, x_2) = a_1\chi^0_{31}(x_1, x_2);$$

$$\chi^1_{12}(x_1, x_2) = a_2\chi^0_{32}(x_1, x_2);$$

д) функция однородна как функция от x_1, x_2 и как функция от x_1 при любом фиксированном x_2;

е) функция может быть получена из функции с постоянной эластичностью замены вида

$$y = a_0(a_1 x_1^{a_3} + a_2 x_2^{a_3})^{1/a_3}$$

путем предельного перехода $a_3 \to 0$.

Функция Кобба—Дугласа чаще всего используется для описания среднемасштабных хозяйственных объектов (от производственного объединения до отрасли), характеризующихся устойчивым, стабильным функционированием (вовлечение новой единицы ресурса приносит эффект, пропорциональный средней производительности имеющегося ресурса).

3. *Линейная функция*

$$y = a_1x_1 + a_2x_2. \qquad (2.3)$$

Предпосылки:

а) предельные производительности факторов постоянны

$$\chi^1_{11} = a_1, \ \chi^1_{12} = a_2$$

и в нуле функция принимает нулевое значение;

б) предельная производительность одного из факторов постоянна и функция однородная первой степени:

$$\chi^1_{11} = a_1, \ \chi^1_{21} + \chi^1_{22} = 1;$$

в) функция однородна и эластичность замены факторов по Аллену бесконечна:

$$\sigma^A(x_1, x_2) = \infty;$$

г) эластичности выпуска по факторам обратно пропорциональны его средней производительности:

$$\chi^1_{21} = \frac{a_1}{\chi^0_{31}}, \quad \chi^1_{22} = \frac{a_2}{\chi^0_{32}}.$$

Линейная функция применяется обычно для моделирования крупномасштабных систем (крупная отрасль, народное хозяйство в целом), в которых выпуск продукции является результатом одновременного функционирования множества различных технологий. Особую роль играет предпосылка о постоянстве предельных производительностей факторов или об их неограниченной замещаемости.

4. *Функция Аллена*

$$y = a_0 x_1 x_2 - a_1 x_1^2 - a_2 x_2^2 \qquad (2.4)$$

однозначно задается следующим условием:

скорости роста предельных производительностей постоянны и функция однородна:

$$\chi^2_{i11} = \text{const}, \ \chi^2_{i22} = \text{const}, \ \chi^1_{21} + \chi^1_{22} = \text{const}.$$

Функция Аллена при a_1, $a_2 > 0$ предназначена для описания производственных процессов, в которых чрезмерный рост любого из факторов оказывает отрицательное воздействие на объем выпуска. Обычно такая функция используется для описания мелкомасштабных производственных систем с ограниченными возможностями переработки ресурсов.

5. Функция постоянной эластичности замены факторов (*функция CES*)

$$y = (a_1 x_1^{a_3} + a_3 x_2^{a_3})^{a_4}. \qquad (2.5)$$

Предпосылки:

функция однородна и эластичность замены факторов (по любому из приведенных в п. 1.3.5 определений) постоянна:

$$\sigma(x_1, x_2) = \frac{1}{1 - a_3}.$$

Функция *CES* применяется в случаях, когда отсутствует точная информация об уровне взаимозаменяемости производственных факторов и вместе с тем есть основания предполагать, что этот уровень существенно не изменяется при изменении объемов вовлекаемых ресурсов. Иными словами, экономическая технология обладает определенной устойчивостью по отношению к пропорциям факторов. Функция *CES* (при наличии средств оценивания ее параметров)

может быть использована для моделирования систем любого уровня.

6. Функция с линейной эластичностью замены факторов (*функция LES*)

$$y = x_1^{a_0} (a_1 x_1 + a_2 x_2)^{a_3}. \qquad (2.6)$$

Предпосылки:

функция однородна и эластичность замены факторов по Аллену является линейной функцией от отношения факторов с единичным свободным членом:

$$\sigma^A (x_1, x_2) = 1 + c \frac{x_1}{x_2},$$

где $c = \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_1 a_3}{a_0 a_2}$.

Функция *LES* рекомендуется для описания производственных процессов, у которых (в отличие от описываемых функцией *CES*) возможность замещения вовлекаемых факторов существенно зависит от их пропорций, причем при низком уровне x_1/x_2 близка к единице, а с ростом x_1/x_2 неограниченно возрастает. Такая ситуация возможна, например, если рост ресурса x_1 связан с общим расширением производства, появлением множественных технологических процессов с широкими возможностями комбинирования.

7. *Функция Солоу* [86]

$$y = (a_1 x_1^{a_3} + a_2 x_2^{a_4})^{a_5} \qquad (2.7)$$

характеризуется тем, что величина процентного изменения предельной нормы замены факторов, вызванного увеличением любого фактора на один процент, не зависит от начального уровня факторов:

$$\frac{\partial \ln \chi^1_{312}}{\partial \ln x_1} = a_3 - 1, \quad \frac{\partial \ln \chi^1_{312}}{\partial \ln x_2} = 1 - a_4$$

(стоит обратить внимание на сходство величины $\frac{\partial \ln \chi^1_{312}}{\partial \ln x_i}$ с величиной $\frac{\partial \ln \chi^1_{312}}{\partial \ln \left(\frac{x_1}{x_2}\right)}$, использованной в п. 1.3.5 для определения эластичности замены факторов).

Функция Солоу может использоваться примерно в тех же ситуациях, что и функция *CES*, однако предпосылки, лежащие в ее основе, слабее предпосылок функции *CES* (в частности, не требуется предположения об однородности). Это позволяет рекомендовать ее (при наличии соответствую

щих средств оценки параметров) в тех случаях, когда предположение об однородности представляется неоправданным, например когда влияние на объем выпуска увеличения каждого из факторов проявляется совершенно различным образом. Функция Солоу может моделировать системы любого масштаба.

8. *Ограниченная функция CES*

$$y = \min\left(\frac{x_1}{a_1},\ \frac{x_2}{a_2},\ (a_3 x_1^{a_5} + a_4 x_2^{a_5})^{a_6}\right). \qquad (2.8)$$

Предпосылки:

функция моделирует процесс, в котором при малых значениях одного из факторов выпуск пропорционален объему этого фактора, при больших — описывается функцией *CES*. Функцию можно рассматривать как решение задачи оптимизации

$$\begin{cases} a_1 y \leqslant x_1; \\ a_2 y \leqslant x_2; \\ y \leqslant (a_3 x_1^{a_5} + a_4 x_2^{a_5})^{a_6}, \end{cases}$$
$$y \to \max,$$

относительно переменной y.

Подобным образом могут быть построены ограниченные функции Кобба—Дугласа, Солоу и др.

Ограниченная функция *CES* предназначена для описания двухрежимного производственного процесса, в котором один из режимов характеризуется отсутствием заменяемости факторов, другой — ненулевой постоянной (но не известной заранее) величиной эластичности замены. При этом переход от одного режима к другому осуществляется в зависимости от уровня лимитирующего первый режим фактора.

9. *Многорежимная функция* [39]

$$y = (a_{11}x_1^{a_0} + a_{21}x_2^{a_0})^{a_1} \ldots (a_{1k}x_1^{a_0} + a_{2k}x_2^{a_0})^{a_k}. \qquad (2.9)$$

Предпосылки:

функция однородна и эластичность функции по первому аргументу представляет собой сглаженную k-уровневую убывающую ступенчатую функцию. Сглаживание осуществляется путем перехода от кусочно-постоянной функции

$$\bar{\chi}_{21}^{1}(r) = \begin{cases} b & \text{при } 0 \leqslant r \leqslant a; \\ 0 & \text{при } r > a, \end{cases}$$

где a, b — положительные константы, к функции

$$\widetilde{\chi}_{21}^{1}(r)=\frac{b}{1+\left(\frac{r}{a}\right)^{\beta}},$$

где $\beta \gg 1$.

Многорежимная функция, одна из наиболее общих в числе приведенных форм производственных функций, используется при описании процессов, в которых уровень отдачи каждой новой единицы ресурса скачкообразно меняется в зависимости от соотношения факторов. Функцию целесообразно применять при наличии априорной информации о числе режимов (k), а иногда и о ширине «переходной» области между режимами (чем выше $|a_0|$, тем более отчетливо выделяются режимы).

10. *Функция линейного программирования* [35]

$$y=\min\left(\frac{x_1}{a_{11}}, \frac{x_2}{a_{12}}\right)+\ldots+\min\left(\frac{x_1}{a_{k1}}, \frac{x_2}{a_{k2}}\right). \quad (2.10)$$

Предпосылки:

а) функция является выражением зависимости между вектором ограничений и значением целевой функции в задаче линейного программирования

$$\begin{cases} d_{11}y_1 + d_{12}y_2 + \ldots + d_{1k}y_k \leqslant x_1; \\ d_{21}y_1 + d_{22}y_2 + \ldots + d_{2k}y_k \leqslant x_2, \end{cases}$$

$$y = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_ky_k \to \max,$$

где $d_{11}, \ldots, d_{k2}, b_1, b_2$ — положительные константы, зависящие от $a_{11}, \ldots, a_{k2}$; y_1, y_2 — переменные;

б) предельная производительность по первому (второму) фактору представляет собой неубывающую (соответственно невозрастающую) многоступенчатую функцию от x_1/x_2 с нулевым нижним уровнем.

Функцию линейного программирования имеет смысл использовать в тех случаях, когда выпуск продукции является результатом одновременного функционирования k фиксированных технологий, использующих одни и те же ресурсы. Иногда функции типа Леонтьева и функции линейного программирования оказывается возможным построить без статистического оценивания параметров, на основе нормативно-технической информации.

Связи между классами функций 1—10 изображены на рис. 2.12. Каждой вершине графа соответствует определенный вид производственной функции, а стрелка от i-й вершины к j-й означает, что i-й класс включается в j-й тип или

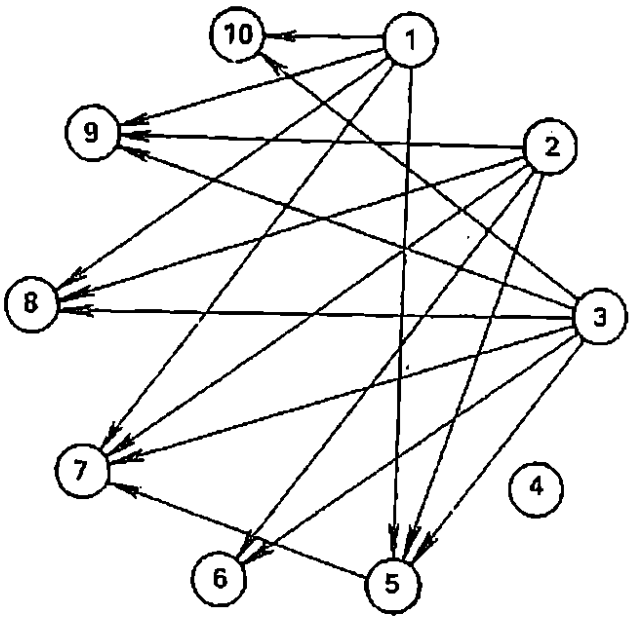


Рис. 2.12

может быть получен путем перехода к пределу по одному из параметров. (Класс 5 может быть включен в классы 8, 9.)

Приведенный перечень видов производственных функций содержит лишь наиболее известные классы функций. Их список постоянно пополняется, в практику моделирования вводятся все более сложные, гибкие производственные функции.

Укажем некоторые пути обобщения приведенных видов функций.

1. Отказ от предположения об однородности. Из приведенных функций неоднородной являются только функции (2.7) и (2.8). Общий вид неоднородной функции *CES* не совпадает с (2.5) и включает кроме неопределенных параметров неопределенные функции [67, 78].

2. Отказ от предположения о постоянстве эластичности замены факторов.

Переменную (в зависимости от уровня факторов) эластичность замены факторов имеют функции *LES*, Солоу, Аллена, ограниченная функция *CES*, многорежимная и функция линейного программирования. Общий вид однородной и неоднородной функций с переменной эластичностью замены (функции *VES*) приведен в п. 2.2.5.

3. Отказ от явной записи производственной функции.

Здесь можно отметить функцию, аналогичную функции Кобба—Дугласа с параметрами, зависящими от объема выпуска [45]; функцию *CRESH*, являющуюся решением функционального уравнения

$$a_1\left(\frac{x_1}{h(y)}\right)^{a_3}+a_2\left(\frac{x_2}{h(y)}\right)^{a_4}=1,$$

где $h(y)$ — заданная непрерывно дифференцируемая функция, для которой $h(0)=0$, $h'(0)>0$ [77].

4. Применение арифметических операций и операций подстановки.

Новые виды функций образуются, например, путем перемножения функции Кобба—Дугласа и функции *CES*

$$y=a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} (a_3 x_1^{a_5}+a_4 x_2^{a_5})^{a_6}$$

(функция Сато в терминологии [11]). Используя операцию подстановки одной функции *CES* в качестве фактора для другой, получаем двухуровневую функцию *CES* [77] и т. д. (см. также 2.2.4).

5. Использование различных шкал измерения переменных. Возникающие при этом возможности рассмотрены в п. 2.2.3.

2.2.2. Прогностические функции и однородные двухфакторные производственные функции

Существует взаимно однозначное соответствие между двухфакторными однородными функциями данной степени однородности γ и функциями от одной переменной. Каждой функции $f(x_1, x_2)$ степени однородности γ соответствует функция от одной переменной $g(r)=f(r, 1)$. Связь между функциями $f(x_1, x_2)$ и $g(r)$ выражается соотношением

$$f(x_1, x_2)=x_2^{\gamma} g(x_1/x_2). \qquad (2.11)$$

Предположим, что $f(x_1, x_2)$ является дважды дифференцируемой неоклассической функцией. Какие условия это накладывает на функцию $g(r)$?

Таким образом, функция $f(x_1, x_2)$ не убывает по каждому аргументу тогда и только тогда, когда функция $g(r)$ не убывает и темп ее роста не превосходит γ.

Условиям $\chi^2_{111}\leqslant 0$, $\chi^2_{122}\leqslant 0$ отвечают соотношения:

$$g''(r)\leqslant 0; \qquad (2.12)$$

$$\gamma(\gamma-1)g(r)-2(\gamma-1)rg'(r)+r^2g''(r)\leqslant 0. \qquad (2.13)$$

При условии $g''(r)\leqslant 0$ (вогнутость функции g) для выполнения неравенства (2.13) достаточно, чтобы

$$\frac{d\ln g}{d\ln r}\leqslant\frac{1}{2}\gamma\leqslant\frac{1}{2}.$$

Из (2.11), (2.13) вытекает также, что функция $f(x_1, x_2)$ тогда и только тогда будет классической, когда функция $g(r)$ не убывает и вогнута.

Функции $g(r)$, удовлетворяющие таким условиям, часто используются для прогностической экстраполяции экономических показателей (см. [62]). Назовем их *прогностическими*. Каждой прогностической функции $g(r)$ соответствует, таким образом, классическая функция

$$f(x_1, x_2) = x_2 g(x_1/x_2)$$

и (в случае, когда темп роста $g(r)$ не превосходит 1/2) множество неоклассических функций вида

$$f(x_1, x_2) = x_2^{\gamma} g(x_1/x_2),$$

где

$$\sup_r \frac{d \ln g}{d \ln r} \leqslant \gamma \leqslant 1.$$

Каждой характеристике $\chi^l_{i/k}$ функции f соответствует определенная характеристика функции g. Аналогом эластичности замены факторов для функции g служит величина

$$\sigma^1(r) = \frac{d\,\dfrac{g(r)}{r}}{dg'(r)} \Bigg/ \frac{g(r)}{rg'(r)}.$$

Она показывает, на сколько пунктов изменится тангенс угла радиуса-вектора точки $(r, g(r))$ при изменении на один пункт тангенса угла касательной к кривой $y = g(r)$ в точке r (ср. с интерпретацией эластичности замены факторов в п. 1.3.5). Можно показать, что так определенная величина $\sigma^1(r)$ для функции $g(r)$ совпадает с эластичностью замены факторов по Аллену для функции $f(x_1, x_2) = x_2 g(x_1/x_2)$, т. е. $\sigma^1(r) = \sigma^A(rx_2, x_2)$ (при любом x_2).

Класс функций с $\sigma^1 = \text{const}$ состоит из функций вида

$$g(r) = a_0 (a_1 + r^{a_2})^{1/a_2},$$

где $a_2 = 1 - 1/\sigma^1$.

При $\sigma^1 \to 0$ функция $g(r)$ стремится к функции $g(r) = a_0 \min(1, r)$ (однофакторный аналог функции Леонтьева).

Соответствие между двухфакторными однородными производственными функциями и однофакторными функциями позволяет существенно расширить перечень видов неоклассических и других однородных производственных функций за счет использования неубывающих прогностических функ-

ций. В [62] описано 15 видов наиболее широко применяемых для экстраполяции прогностических функций. Каждой из них соответствует определенная производственная функция (их вид и характеристики приведены в [31]).

С помощью описанной процедуры, используя широкий выбор прогностических функций с заданным характером поведения (наличие асимптот, экстремумов и т. п. [62, 65]), можно строить достаточно гибкие модели.

2.2.3. Шкалы измерения показателей и двухфакторные производственные функции

Список видов производственных функций можно расширить также, применяя преобразования показателей ресурсов и выпуска. Так, если дан класс функций $F = \{f_a(x_1, x_2)\}$, то, применяя преобразования

$$x_1 \to \varphi_1(x_1), \quad x_2 \to \varphi_2(x_2), \quad y \to \varphi_0(y), \tag{2.14}$$

где φ_0, φ_1, φ_2 — заданные неотрицательные монотонные функции, мы получим новый класс функций

$G = \{g_a(x_1, x_2)\}$, где $g_a(x_1, x_2) = \varphi_0^{-1}(f_a(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2)))$.

Например, исходя из линейной функции

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + a_0 \tag{2.15}$$

и применяя логарифмическое преобразование $y \to \ln y$, $x_1 \to \ln x_1$, $x_2 \to \ln x_2$, получаем функцию вида

$$y = e^{a_0} x_1^{a_1} x_2^{a_2},$$

т. е. функцию Кобба—Дугласа; применяя преобразование

$$y \to \ln y, \quad x_1 \to \ln x_1, \quad x_2 \to \sqrt{x_2}, \tag{2.16}$$

получим функцию вида

$$y = x_1^{a_1} e^{a_2\sqrt{x_2}}.$$

Применение монотонных преобразований $y \to \varphi_0(y)$, $x_1 \to \varphi_1(x_1)$, $x_2 \to \varphi_2(x_2)$ можно трактовать как изменение шкалы измерения. Измерение переменных в различных шкалах (часто в логарифмической или степенной) практикуется для выравнивания показателей, с разной скоростью изменяющихся во времени. Так, если показатели y и x_1 растут относительно быстро со временем, а показатель x_2 — медленно, применяют преобразование (2.16).

В данном случае преобразование шкал измерения показателей задавалось однозначно вне зависимости от модели

процесса. Однако возможны ситуации, когда сама шкала подбирается одновременно с построением модели процесса и содержит неизвестные параметры. Так, степенное преобразование с неопределенным показателем степени b вида $y \to y^b$, $x_1 \to x_1^b$, $x_2 \to x_2^b$ превращает линейную функцию (2.15) в линейно-однородную функцию CES:

$$y = (a_1 x_1^b + a_2 x_2^b)^{1/b}.$$

Если показатель степени для преобразования $y \to y^{a_0}$ не совпадает с показателями преобразования x_1, x_2, то получаем функцию CES произвольной степени однородности:

$$y = (a_1 x_1^b + a_2 x_2^b)^{1/a_0}.$$

Наконец, если различны все три показателя степени $y \to y^{a_0}$, $x_1 \to x_1^{a_3}$, $x_2 \to x_2^{a_4}$, то в результате линейная функция превратится в функцию Солоу:

$$y = (a_1 x_1^{a_3} + a_2 x_2^{a_4})^{1/a_0}.$$

Особенно большое значение имеет подходящее шкалирование показателей в связи с вычислительными проблемами, возникающими при оценке параметров производственных функций. Известно, что линейная функция наиболее проста для оценки параметров, и процедура их спецификации хорошо обеспечена как вычислительными методами и программами, так и математическими результатами. Использование шкалирования переменных $x \to \tilde{x} = \varphi(x)$ существенно расширяет сферу применения линейных методов, позволяя рассматривать производственные функции вида

$$\varphi_0(y) = a_1\varphi_1(x_1) + a_2\varphi_2(x_2),$$

где φ_0, φ_1, φ_2 — различные числовые функции от одного переменного, удовлетворяющие условиям, налагаемым на шкалы. Заметим, что прогностические функции, приведенные в настоящей работе, могут фигурировать в качестве шкал для показателей.

Однако, если требовать, чтобы производственная функция была однородной относительно первоначальных переменных, то класс функций, получаемых из линейной функции в результате автономного шкалирования показателей, резко сужается. Пусть φ_0, φ_1, φ_2 — монотонно возрастающие дифференцируемые функции и $y = \varphi_0^{-1}(a_1\varphi_1(x_1) + a_2\varphi_2(x_2)) = f(x_1, x_2)$ — однородная функция степени

однородности γ. Покажем, что функция $f(x_1, x_2)$ относится к классу CES. Предельная норма χ^1_{312} замены для функции f имеет вид

$$\chi^1_{312}(x_1, x_2) = \frac{\partial f}{\partial x_2} \Big/ \frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{a_2}{a_1} \frac{\varphi_2'(x_2)}{\varphi_1'(x_1)}.$$

Поскольку f — однородная функция, χ^1_{312} зависит только от отношения x_1/x_2. Пусть $\frac{\varphi_2'(x_2)}{\varphi_1'(x_1)} = \psi\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$, где ψ — функция от одного переменного. Полагая $x_2 = 1$, получаем отсюда, что $\psi(x_1) = \frac{\varphi_2'(1)}{\varphi_1'(x_1)}$. Аналогично при $x_1 = 1$ имеем $\psi\left(\frac{1}{x_2}\right) = \frac{\varphi_2'(x_2)}{\varphi_1'(1)}$. Таким образом, $\frac{\varphi_2'(x_2)}{\varphi_1'(x_1)} = \frac{\varphi_1'(1)\psi\left(\frac{1}{x_2}\right)\psi(x_1)}{\varphi_2'(1)} = \psi\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$. Решением функционального уравнения $\psi\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = c\varphi(x_1)\psi\left(\frac{1}{x_2}\right)$ в классе монотонных функций является, как известно, степенная функция $\psi\left(\frac{1}{x_2}\right) = a\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^b$, где a, b — константы. Поэтому $\varphi_1'(x_1) = c_1 x_1^{-b}$, $\varphi_2'(x_2) = c_2 x_2^{-b}$, где c_1, c_2 — некоторые константы. Интегрируя эти соотношения по x_1 и x_2, получаем, что $\varphi_1(x_1) = a_1 x_1^{-b+1} + d_1$, $\varphi_2(x_2) = a_2 x_2^{-b+1} + d_2$ (при $b \neq 1$) и $\varphi_1(x_1) = a_1 \ln x_1 + d_1$, $\varphi_2(x_2) = a_2 \ln x_2 + d_2$ (при $b = 1$). Таким образом, имеет место один из двух случаев: либо $f(x_1, x_2) = \varphi_0^{-1}(a_1 x_1^{-b+1} + a_2 x_2^{-b+1} + d)$, либо $f(x_1, x_2) = \varphi_0^{-1}(\ln(x_1^{a_1} \times x_2^{a_2}) + d)$. Так как функция f однородная степени γ, то в первом случае при $\lambda > 0$ $f(\lambda x_1, \lambda x_2) = \varphi_0^{-1}(a_1(\lambda x_1)^{-b+1} + a_2(\lambda x_2)^{-b+1}) = \lambda^\gamma \varphi_0^{-1}(a_1 x)$. Подбирая такие x_1 и x_2, что $a_1 x_1^{-b+1} + a_2 x_2^{-b+1} = 1$, получим, что $\varphi_0^{-1}(\lambda^{-b+1} + d) = \lambda^\gamma \varphi_0^{-1}(1 + d)$ для любого $\lambda > 0$. Если обозначить $\lambda^{-b+1} + d$ через u, то $\varphi_0^{-1}(u) = a_0(u - d)^{\frac{\gamma}{-b+1}}$, где a_0 — постоянная. Отсюда $f(x_1, x_2) = \varphi_0^{-1}(a_1 x_1^{-b+1} + a_2 x_2^{-b+1} + d) = a_0(a_1 x_1^{-b+1} + a_2 x_2^{-b+1})^{\frac{\gamma}{-b+1}}$. Во втором случае аналогичным образом доказывается, что $f(x_1, x_2) = a_0(x_1^{a_1} x_2^{a_2})^{\frac{\gamma}{a_1 + a_2}}$.

Следовательно, если шкалы измерения показателей дифференцируемы и монотонны, то единственными однородными функциями, которые можно получить из линейных функций путем применения этих шкал, являются функции с постоянной эластичностью замены факторов.

2.2.4. Многофакторные производственные функции

Один из наиболее естественных переходов от двухфакторных функций к многофакторным состоит в следующем. Рассмотрим двухфакторную функцию

$$y = \varphi_1 (x_1, \ x_2). \tag{2.17}$$

Аргумент x_2 этой функции также будем рассматривать как обобщающий показатель, зависящий от двух других факторов x_3, x_4:

$$x_2 = \varphi_2 (x_3, \ x_4), \tag{2.18}$$

где φ_2 — некоторая функция. Подставляя это выражение в формулу (2.17), получим трехфакторную функцию $y = \varphi_1 (x_1, \varphi_2 (x_3, x_4))$, выражающую зависимость показателя y от аргументов x_1, x_3, x_4. Здесь удобно перенумеровать переменные: x_3 обозначить через x_2, x_4 — через x_3. Тогда функция будет иметь вид $y = \varphi_1 (x_1, \varphi_2 (x_2, x_3))$. Этот процесс можно продолжить, считая, что x_3, в свою очередь, зависит от x_4, x_5:

$$x_3 = \varphi_3 (x_4, \ x_5). \tag{2.19}$$

Подстановка этого выражения в (2.18) (после переобозначения переменных) дает уже четырехфакторную функцию $y = \varphi_1 (x_1, \varphi_2 (x_2, \varphi_3 (x_3, x_4)))$.

В общем виде: если задана $n - 1$ двухфакторная функция $\varphi_1 (x_1, x_2)$, $\varphi_2 (x_3, x_4)$, ..., $\varphi_{n-1} (x_{2n-3}, x_{2n-2})$, то n-факторная функция $y = f (x_1, \ldots, x_n)$ может быть получена в результате их последовательной подстановки:

$$f (x_1, \ldots, x_n) = \varphi_1 (x_1, \varphi_2 (x_2, \ldots, \varphi_{n-1} (x_{n-1}, x_n) \ldots)). \tag{2.20}$$

Операция такой подстановки (суперпозиции) имеет очевидный экономический смысл: второй аргумент двухфакторной функции последовательно представляется в виде зависимости от показателей более низких иерархических уровней.

Нетрудно проверить следующие свойства операции суперпозиции:

а) если φ_1, ..., φ_{n-1} — неубывающие функции, то f — также неубывающая функция;

б) если φ_2, ..., φ_{n-1} — линейно-однородные функции, а φ_1 — однородная функция степени однородности γ, то f — однородная функция степени однородности γ;

в) если φ_1, ..., φ_n — вогнутые неубывающие функции, то f — вогнутая неубывающая функция.

Таким образом, мы видим, что если двухфакторные функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ были неоклассическими, то полученная в результате их суперпозиции (2.20) функция f также является неоклассической.

Оказывается (это будет видно из дальнейшего), что наиболее распространенные виды многофакторных неоклассических производственных функций естественным путем могут быть получены с помощью суперпозиции (2.20) видов простых двухфакторных производственных функций.

Для произвольных функций от n переменных справедливы утверждения, показывающие, что класс функций, представимых в виде суперпозиции произвольных двухфакторных функций, достаточно широк. Доказано [6], что всякая непрерывная функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ от n переменных при $n \geqslant 4$ представима в виде суперпозиции непрерывных функций от трех переменных. В свою очередь, каждая непрерывная функция от трех переменных может быть получена как суперпозиция функций от двух переменных. Следует иметь в виду, что функции $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ в таких суперпозициях могут быть, вообще говоря, весьма сложными. Отметим также следующий интересный результат [39]: любую непрерывную функцию от двух переменных можно с любой заданной точностью аппроксимировать суперпозицией непрерывных функций от одного переменного и функции $y = x_1 + x_2$.

Приведем перечень и некоторые характеристики наиболее часто применяемых классов многофакторных производственных функций, располагая их в порядке возрастания сложности записи и соответственно соотношения между числом параметров и числом факторов.

1. Функция с фиксированными пропорциями факторов (функция Леонтьева)

$$y = \min\left(\frac{x_1}{a_1}, \ldots, \frac{x_n}{a_n}\right). \tag{2.21}$$

Предпосылки, выделяющие эту функцию, следующие:

а) функция реализует решения следующей задачи линейного программирования:

$$\begin{aligned} &a_i y \leqslant x_i, \ i = 1, \ldots, n, \\ &y \to \max \end{aligned} \tag{2.22}$$

где y — оптимизируемая переменная;

б) функция является пределом функции

$$y = \left(\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^b + \ldots + \left(\frac{x_n}{a_n}\right)^b\right)^{1/b}$$

при $b \to -\infty$;

в) функция однородна, первой степени и эластичности замены между любыми двумя факторами равны нулю:

$$\sigma_{ij}^{A} = \sigma_{ij}^{M} = 0.$$

Представление функции Леонтьева в виде суперпозиции (2.20) реализуется также функциями Леонтьева от двух аргументов:

$$\varphi_i(x_1, x_2) = \min\left(\frac{x_1}{a_i}, \frac{x_2}{a_{i+1}}\right), \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

2. Функция Кобба—Дугласа

$$y = a_0 x_1^{a_1} \ldots x_n^{a_n}. \tag{2.23}$$

В классе дважды дифференцируемых функций выделяется следующими системами предпосылок:

а) $\chi_{2i}^{1}(x_1, \ldots, x_n) = a_i, \; i = 1, \ldots, n.$ (2.24)

Это условие означает, что процентный прирост выпуска, вызванный изменением i-го ресурса на один процент, не зависит от того, каковы были первоначальные размеры ресурсов.

Эквивалентной системе (2.24) являются также следующие системы равенств, характеризующие функцию Кобба—Дугласа:

б) $\dfrac{\partial \chi_{2i}^{1}}{\partial x_j} = 0, \quad i, j = 1, \ldots, n;$ (2.25)

в) $\chi_{1i}^{1} = a_i \chi_{3i}^{0}, \quad i = 1, \ldots, n.$ (2.26)

Последнее равенство интерпретируется как пропорциональность абсолютного прироста выпуска от увеличения ресурса на единицу средней отдаче от единицы этого ресурса. Или, короче, предельная производительность ресурса пропорциональна средней его производительности;

г) функция однородна и эластичность замены (по любому определению) между любыми двумя факторами равна единице:

$$\sigma_{ij} = 1, \; i, \; j = 1, \; \ldots, \; n, \; i \neq j.$$

Функция Кобба—Дугласа получается как суперпозиция (2.20) следующих двухфакторных функций того же вида:

$$\varphi_1(x_1, x_2) = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2 + \ldots + a_n};$$

$$\varphi_2(x_2, x_3) = x_2^{a_2/(a_2 + \ldots + a_n)} x_n^{a_3/(a_2 + \ldots + a_n)};$$

. . . . . .

$$\varphi_{n-1}(x_{n-1}, x_n) = x_{n-1}^{a_{n-1}/(a_{n-1} + a_n)} x_n^{a_n/(a_{n-1} + a_n)}.$$

3. Линейная однородная функция

$$y = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n. \qquad (2.27)$$

В классе дважды дифференцируемых однородных функций ее однозначно характеризуют следующие системы предпосылок:

а) $\chi^1_{1i} = a_i,\ i = 1,\ \ldots,\ n.$ (2.28)

Это означает, что прирост выпуска от роста каждого из ресурсов на единицу постоянен и не зависит от того, каковы были их первоначальные размеры;

б) $\chi^2_{1ij} = 0,\ i,\ j = 1,\ \ldots,\ n.$

Интерпретация такая же, как и для (2.28);

в) функция однородна, первой степени и $\sigma^A_{ij} = \sigma^M_{ij} = \infty$.

Линейная функция является суперпозицией (2.20) линейных двухфакторных функций:

$$\varphi_1(x_1,\ x_2) = a_1x_1 + x_2;$$

$$\varphi_2(x_2,\ x_3) = a_2x_2 + a_3x_3;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi_{n-1}(x_{n-1},\ x_n) = a_{n-1}x_{n-1} + a_nx_n.$$

4. Функция с постоянной эластичностью замены факторов по Михалевскому (*функция CESM*)

$$y = \left(a_1 x_1^{a_{n+1}} + \ldots + a_n x_n^{a_{n+1}}\right)^{a_{n+2}}. \qquad (2.29)$$

Среди трижды дифференцируемых однородных функций (2.29) выделяется условием:

а) $\sigma^M_{ij} = \text{const},\ i,\ j = 1,\ \ldots,\ n,\ i \neq j.$

Эквивалентными при $n > 2$ являются также условия:

б) σ^M_{ij} зависит только от $x_1,\ \ldots,\ x_n$;

в) $\chi^1_{3ij}(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ зависит только от x_i/x_j.

Иными словами, соотношение между приростами выпуска, связанными с увеличением на единицу i-го и j-го ресурсов, полностью определяется соотношением объемов этих ресурсов.

В виде суперпозиции (2.20) она представляется с помощью функции того же вида:

$$\varphi_1(x_1, x_2) = \left(a_1 x_1^{a_{n+1}} + x_2^{a_{n+1}}\right)^{a_{n+2}};$$

$$\varphi_2(x_2, x_3) = \left(a_2 x_2^{a_{n+1}} + x_3^{a_{n+1}}\right)^{1/a_{n+1}};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi_{n-1}(x_{n-1}, x_n) = \left(a_{n-1} x_{n-1}^{a_{n+1}} + a_n x_n^{a_{n+1}}\right)^{1/a_{n+1}}.$$

5. Ограниченная функция *CESM*

$$y = \min\left(\frac{x_1}{a_1}, \ldots, \frac{x_k}{a_k}, \left(a_{k+1} x_{k+1}^{a_{n+1}} + \ldots + a_n x_n^{a_{n+1}}\right)^{a_{n+2}}\right). \quad (2.30)$$

Значение функции определяется в зависимости от уровня переменных $x_1, \ldots, x_k$ и общего уровня группы переменных $x_{k+1}, \ldots, x_n$. Между переменными $x_1, \ldots, x_k$ и группой остальных переменных отсутствует взаимозаменяемость, и если объем каждого ресурса $x_1, \ldots, x_k$ достаточно велик, то выпуск определяется переменными $x_{k+1}, \ldots, x_n$, эластичность замены между которыми предполагается постоянной. Характеристики этой функции аналогичны характеристикам функции *CESM*, если ее значения не превосходят пороговой величины $\min\left(\frac{x_1}{a_1}, \ldots, \frac{x_k}{a_k}\right)$. В области превышения этого порога «включается» функция Леонтьева.

Ограниченная функция *CESM* представляет решение задачи линейного программирования

$$\begin{cases} a_1 y \leqslant x_1; \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_k y \leqslant x_k; \\ y \leqslant \left(a_{k+1} x_{k+1}^{a_{n+1}} + \ldots + a_n x_n^{a_{n+1}}\right)^{a_{n+2}}, \end{cases}$$

$$y \to \max$$

относительно переменной y.

Представление ограниченной функции *CESM* в виде суперпозиции двухфакторных функций (2.20) задается функциями

$$\varphi_1(x_1, x_2) = \min\left(\frac{x_1}{a_1}, \frac{x_2}{a_2}\right);$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\varphi_k(x_k, x_{k+1}) = \min\left(\frac{x_k}{a_k}, x_{k+1}\right);$$

$$\varphi_{k+1}(x_{k+1}, x_{k+2}) = \left(a_{k+1} x_{k+1}^{a_{n+1}} + x_{k+2}^{a_{n+1}}\right)^{a_{n+2}};$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\varphi_{n-1}(x_{n-1}, x_n) = \left(a_{n-1} x_{n-1}^{a_{n+1}} + a_n x_n^{a_{n+1}}\right)^{\frac{1}{a_{n+1}}},$$

первые k из которых имеют вид двухфакторных функций Леонтьева, остальные — функции *CESM*.

Аналогичным образом строятся ограниченные функции Кобба—Дугласа и ограниченные функции других видов.

6. Функция Солоу

$$y = (a_1 x_1^{b_1} + \ldots + a_n x_n^{b_n})^{\nu}. \qquad (2.31)$$

В классе дважды дифференцируемых функций функцию Солоу характеризуют следующие условия:

$$\frac{\partial \ln \chi_{3ij}^1}{\partial \ln x_k} = \begin{cases} b_i - 1 & \text{при } k = 1; \\ 1 - b_j & \text{при } k = j \quad i, j, k = 1, \ldots, n; \\ 0 & \text{при } k \neq i, j. \end{cases} \qquad (2.32)$$

Иными словами, предельная норма замены i-го ресурса j-м не изменяется при увеличении других ресурсов, а ее процентный прирост от увеличения i-го или j-го ресурсов на один процент не зависит от первоначального количества соответствующего ресурса.

Функция получается с помощью суперпозиции следующих двухфакторных производственных функций Солоу:

$$\varphi_1(x_1, x_2) = (a_1 x_1^{b_1} + x_2)^{\nu};$$
$$\varphi_2(x_2, x_3) = a_2 x_2^{b_2} + x_3;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi_{n-1}(x_{n-1}, x_n) = a_{n-1} x_n^{b_{n-1}} + a_n x_n^{b_n}.$$

Перечисленные выше виды функций 1—6 получены из «элементарных» двухфакторных производственных функций путем последовательной суперпозиции (2.20). Здесь переменные агрегировались, начиная с x_{n-1} и x_n, путем последовательного присоединения к уже агрегированным аргументам переменной x_i, $i = n - 2, \ldots, 1$.

В некоторых случаях удобны другие формы агрегирования переменных, представляющие функцию в виде суперпозиции двухфакторных функций. Так, переменные $x_1, \ldots, \ldots, x_n$ можно разбить на ряд групп, которые независимо агрегируются в новые переменные. Впоследствии из этих переменных строится результирующая функция.

Представление функции в виде суперпозиции такого рода удобно, в частности, для многофакторной функции с постоянными эластичностями замены по Аллену.

7. Функция с постоянными эластичностями замены факторов по Аллену (*функция CESA*)

$$y=\left(a_1 x_1^{b_1}+\ldots+a_{k_1} x_{k_1}^{b_1}\right)^{\frac{\gamma_1}{b_1}}\left(a_{k_1} x_{k_1+1}^{b_2}+\ldots+a_{k_2} x_{k_2}^{b_2}\right)^{\frac{\gamma_2}{b_2}}\times\ldots$$

$$\ldots\times\left(a_{k_s} x_{k_s+1}^{b_{s+1}}+\ldots+a_{k_{s+1}} x_{k_{s+1}}^{b_{s+1}}\right)^{\frac{\gamma_{s+1}}{b_{s+1}}}, \qquad (2.33)$$

где $k_1<k_2<\ldots<k_{s+1}=n$.

Данная функция выделяется в классе однородных дважды дифференцируемых функций условиями

$$\sigma_{ij}^{A}(x_1,\ldots,x_n)=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{1-b_r}, & \text{если } k_r<i<j\leqslant k_{r+1} \text{ для некоторого } r;\\ 1, & \text{если } k_r<i<k_{r+1}<j \text{ для некоторого } r.\end{cases}$$

Таким образом, эластичности замены по Аллену между любыми двумя факторами, попавшими в одну группу с номером r, равны $1/(1-b_r)$, а попавшими в разные группы —1.

Используя двухфакторные функции Кобба—Дугласа:

$$\varphi_1(x_1,x_2)=x_1^{\frac{\gamma_1}{b_1}}\,x_2^{\frac{\gamma_2}{b_2}+\ldots+\frac{\gamma_{s+1}}{b_{s+1}}};$$

$$\varphi_2(x_2,x_3)=x_2^{\frac{\gamma_2}{b_2}\Big/\left(\frac{\gamma_2}{b_2}+\ldots+\frac{\gamma_{s+1}}{b_{s+1}}\right)}\,x_3^{\frac{\gamma_3}{b_3}\Big/\left(\frac{\gamma_2}{b_2}+\ldots+\frac{\gamma_{s+1}}{b_{s+1}}\right)};$$

. . . . . .

$$\varphi_s(x_s,x_{s+1})=x_s^{\frac{\gamma_s}{b_s}\Big/\left(\frac{\gamma_s}{b_s}+\frac{\gamma_{s+1}}{b_{s+1}}\right)}\,x_{s+1}^{\frac{\gamma_{s+1}}{b_{s+1}}\Big/\left(\frac{\gamma_s}{b_s}+\frac{\gamma_{s+1}}{b_{s+1}}\right)}$$

и двухфакторные функции с постоянной эластичностью замены:

$$\bar{\varphi}_1(x_1,x_2)=(a_1 x_1^{b_1}+x_2^{b_1});$$

$$\bar{\varphi}_2(x_2,x_3)=a_2 x_2^{b_1}+x_3^{b_1};$$

. . . . . .

$$\bar{\varphi}_{k_1-1}(x_{k_1-1}\,x_{k_1})=a_{k_1-1}\,x_{k_1-1}^{b_1}+a_{k_1}\,x_{k_1}^{b_1};$$

. . . . . .

$$\bar{\varphi}_{k_{s+1}-1}(x_{k_{s+1}-1},x_{k_{s+1}})=a_{k_{s+1}-1}\,x_{k_{s+1}-1}^{b_{s+1}}+a_{k_{s+1}}\,x_{k_{s+1}}^{b_{s+1}},$$

можно получить функцию *CESA* в виде суперпозиции двухфакторных функций.

Наконец, возможен способ агрегирования, при котором в образовании новых переменных участвуют каждый раз все исходные переменные $x_1, \ldots, x_n$, после чего группируются полученные агрегаты.

Функция, отвечающая такому способу агрегирования переменных, имеет, например, вид

$$y = \varphi_0(\overline{\varphi}_1(x_1, \overline{\varphi}_2(x_2, \ldots, \overline{\varphi}_{n-1}(x_{n-1}, x_n)\ldots)),$$
$$\varphi_1(x_1, \varphi_2(x_2, \ldots, \varphi_{n-1}(x_{n-1}, x_n)\ldots))). \qquad (2.34)$$

К числу таких функций относятся, в частности, многорежимная функция и «параллельная» функция Леонтьева.

8. Многорежимная функция

$$y = (a_{11} x_1^{b_1} + \ldots + a_{1n} x_n^{b_1})^{\nu_1/b_1} \ldots$$
$$\ldots (a_{h1} x_1^{b_h} + \ldots + a_{hn} x_n^{b_h})^{\nu_h/b_h}. \qquad (2.35)$$

Этот класс функций позволяет моделировать различные режимы производственного процесса (см. [38]).

Функция (2.35) представима в виде суперпозиции двухфакторных функций с постоянной эластичностью замены и двухфакторной функции Кобба—Дугласа.

Многорежимная функция представляет собой один из наиболее общих видов дифференцируемых однородных многофакторных производственных функций, используемых в настоящее время в экономико-математических расчетах. Приведем один частный случай многорежимной функции для иллюстрации ее свойств. Пусть

$$y = a_0(x_2^{b_2} - (a_2 x_1)^{b_2})^{-1} (x_3^{b_3} - (a_3 x_1)^{b_3})^{-1} \ldots$$
$$\ldots (x_n^{b_n} - (a_n x_n)^{b_n})^{-1}. \qquad (2.36)$$

При $b_2, \ldots, b_n < 0$, $a_2, \ldots, a_n > 0$ функция (2.36) обладает следующими свойствами:

а) если $\frac{x_2}{x_1} \gg \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{x_n}{x_1} \gg \frac{1}{a_n}$, то функция близка к степенной функции $y = a_0 x_1^{b_2 + \ldots + b_n}$ и слабо зависит от $x_2, \ldots, \ldots, x_n$;

б) если $\frac{x_2}{x_1} \ll \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{x_n}{x_1} \ll \frac{1}{a_n}$, то функция близка к функции Кобба—Дугласа $y = a_0 x_2^{b_2} \ldots x_n^{b_n}$ от переменных $x_2, \ldots, x_n$ и слабо зависит от x_1.

Иными словами, если ресурсы $x_2, \ldots, x_n$ избыточны по отношению к x_1, то x_1 является лимитирующим ресурсом и функция близка к функции от одного переменного x_1. Наоборот, если ресурсов $x_2, \ldots, x_n$ недостаточно, то все они

влияют на значение функции, а сама она близка к функции Кобба—Дугласа.

10. «Параллельная» функция Леонтьева

$$y = \min\left(\frac{x_1}{a_{11}}, \ldots, \frac{x_n}{a_{1n}}\right) + \ldots + \min\left(\frac{x_1}{a_{k1}}, \ldots, \frac{x_n}{a_{kn}}\right) \quad (2.37)$$

отражает процесс, в котором объем выпуска складывается из выпусков k параллельных производственных процессов с фиксированными пропорциями факторов, использующих общие ресурсы. Функция (2.37) может быть записана с помощью суперпозиции двухфакторных функций Леонтьева и функции $\varphi(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

2.2.5. О классификации видов производственных функций

Проблеме классификации видов производственных функций, возникающей в связи с необходимостью наиболее полного учета характеристик и особенностей объектов моделирования, в настоящее время посвящена обширная литература. Приведем (без доказательства) ряд результатов, характеризующих вид производственной функции в зависимости от условий, налагаемых на эластичности замены между i-м и j-м факторами. При этом в качестве классификационных будут использованы три показателя эластичности замены факторов для n-факторных функций (см. п. 1.3.6): эластичность замены факторов по Аллену σ_{ij}^{A}, по Михалевскому σ_{ij}^{M} и эластичности замены факторов при $x_k = \text{const}$, $k \neq i, j$, $\tilde{\sigma}_{ij}^{A}$ (по Мак Фаддену).

Теорема 1 [83]. Пусть $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ — неотрицательная трижды непрерывно дифференцируемая классическая функция. Если для любой пары факторов x_i, x_j $(i \neq j)$ эластичности замены по Аллену σ_{ij}^{A} постоянны, т. е. не зависят от $x_1, \ldots, x_n$ и не все равны 1, то функция f имеет вид

$$y = \left(\sum_{k \in N_1} \alpha_k x_k^{-\beta_1}\right)^{-1/\beta_1} \ldots \left(\sum_{k \in N_s} \alpha_k x_k^{-\beta_s}\right)^{-1/\beta_s}, \quad (2.38)$$

где α_k, β_l — постоянные параметры, $\beta_j \neq 0$, $N_1, \ldots, N_s$ — непересекающиеся подмножества множества $\{1, \ldots, n\}$, такие, что $N_1 \cup \ldots \cup N_s = \{1, \ldots, n\}$.

При этом

$$\sigma_{ij}^{A} = \begin{cases} 1, & \text{если } i, j \text{ принадлежат разным подмножествам из числа } N_1, \ldots, N_s; \\ \dfrac{1}{1+\beta_l}, & \text{если } i, j \in N_l, \text{ при } l \in \{1, \ldots, n\}. \end{cases}$$

Теорема 2 [36]. Пусть $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ — неотрицательная трижды непрерывно дифференцируемая функция степени однородности γ, число факторов которой больше двух. Если для любой пары факторов x_i, x_j $(i \neq j)$ эластичности замены факторов по Михалевскому σ_{ij}^{M} зависят только от $x_1, \ldots, x_n$, то все σ_{ij}^{M} постоянны, равны между собой, а функция имеет вид

$$y = \left(a_1 x_1^{-\beta} + \ldots + a_n x_n^{-\beta}\right)^{-\frac{\gamma}{\beta}} \tag{2.39}$$

или

$$y = a_0 \left(x_1^{a_1} \ldots x_n^{a_n}\right)^{\frac{\gamma}{a_1 + \ldots + a_n}},$$

где $a_0, \ldots, a_n, \beta$ — постоянные параметры, причем $\beta \neq 0$. Первый случай имеет место, если $\sigma_{ij}^{M} \neq 1$, и тогда $\sigma_{ij}^{M} = 1/(1+\beta)$ для любых $i \neq j$, второй — если $\sigma_{ij}^{M} = 1$.

Теорема 3 [72]. Пусть $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ — неотрицательная дважды непрерывно дифференцируемая классическая функция, причем на положительном ортанте ее первые частные производные положительны. Если для любой пары факторов x_i, x_j $(i \neq j)$ эластичности замены факторов по Мак Фаддену σ_{ij}^{Φ} постоянны, то функция неявно записывается в виде

$$a_1 \left(\prod_{k \in N_1} \left(\frac{x_k}{y}\right)\right)^{-\beta} + \ldots + a_s \left(\prod_{k \in N_s} \left(\frac{x_k}{y}\right)\right)^{-\beta} \equiv 1 \tag{2.40}$$

или

$$a_0 \prod_{k \in N_1} \left(\frac{x_k}{y}\right)^{-\beta} \ldots \prod_{k \in N_s} \left(\frac{x_k}{y}\right)^{-\beta} \equiv 1,$$

где $a_0, \ldots, a_s, \beta$ — постоянные параметры, $\beta \neq 0$; $N_1, \ldots, N_s$ — непересекающиеся подмножества множества $\{1, \ldots, n\}$, такие, что $N_1 \cup \ldots \cup N_s = \{1, \ldots, n\}$. При этом

$$\tilde{\sigma}_{ij}^{A} = \begin{cases} 1, & \text{если } i, j \in N_k \text{ для некоторого } k \in \{1, \ldots, n\}; \\ \dfrac{1}{1+\beta}, & \text{если } i, j \text{ принадлежат разным подмножествам из числа } N_1, \ldots, N_s. \end{cases}$$

Первый случай имеет место, если хотя бы одна $\tilde{\sigma}_{ij}^{A} \neq 1$, второй — если все $\tilde{\sigma}_{ij}^{A} = 1$.

Из классификационных результатов для двухфакторных функций приведем общий вид неотрицательной дважды непрерывно дифференцируемой функции степени однородности γ с заданной эластичностью замены по Аллену и Михалевскому $\sigma^{A}\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \sigma^{M}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$ (см. [36]):

$$y = a_1 x_1^{\gamma} \times$$

$$\times \exp\left(-\int \frac{d\left(\frac{x_1}{x_2}\right)}{\frac{x_1}{x_2} + a_2\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 \exp\left(-\int \frac{d\left(\frac{x_1}{x_2}\right)}{\frac{x_1}{x_2}\sigma^{A}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)}\right)}\right),$$

здесь a_1, a_2 — постоянные параметры. Для линейно-однородных функций с заданной эластичностью замены факторов аналогичная формула приведена в [80].

2.3. ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ

2.3.1. Общие свойства области определения производственной функции

Согласно формальному определению производственной функции конкретного объекта ее областью определения служит множество M, получающееся в результате аппроксимации области определения D агрегированной технологии τ. К области M предъявляются следующие основные требования:

а) включать только точки пространства R^n, отвечающие допустимым для данного процесса значениям показателей ресурсов, при этом функция f должна быть близка к функции τ («допустимость» и «адекватность»);

б) включать все точки пространства ресурсов, в которых согласно условиям задачи необходимо вычислять объем выпуска продукции («эффективность»).

Согласно условию а) в множество M включают точки, наиболее характерные для данного производственного процесса. Особое внимание при этом должно уделяться пропорциям (соотношениям) между отдельными видами ресурсов. Если для данной точки $x \in R^n$ эти соотношения существенно отличаются от тех, которые свойственны фактически наблюдавшимся значениям ресурсов, то точка x, как правило, не включается в множество M, поскольку в произ-

водственной функции должны отражаться не случайные, а закономерные черты данного процесса.

Полное соблюдение требований а) и б) к множеству M обычно недостижимо, в какой-то мере они противоречивы. Чем шире область определения производственной функции, тем, как правило, ниже общая степень аппроксимации. С другой стороны, чрезмерное сужение области определения снижает эффективность модели, так как не позволяет выполнить цели моделирования. Поэтому реальная область определения построенных производственных функций всегда является результатом компромисса между «допустимостью», «адекватностью» и «эффективностью».

Отметим некоторые инструментальные требования к области определения производственной функции:

в) множество M должно быть задано таким образом, чтобы в каждой его точке можно было вычислить значение производственной функции f («вычислимость»);

г) в качестве областей определения производственных функций мы будем рассматривать, как правило, открытые* подмножества пространства R^n или открытые подмножества с присоединенной точкой $x = 0$ (предполагается, что если точка $x \in R^n$ является допустимой, то такими же будут и все близкие к ней точки).

Производственная функция f обычно строится, как указано в п. 2.1, в два приема: сначала определяется ее вид, т. е. параметрический класс $F = \{f_a\}$, а затем с помощью оценки параметров a находится функция $\widehat{f} = f_{\widehat{a}}$. Подобным образом может строиться и ее область определения: сначала определяется ее «вид», т. е. параметрический класс множеств $\Omega = \{M_b\}$, затем путем оценки параметров по определенному критерию из него выбирается наилучшая область определения $\widehat{M} = M_{\widehat{b}}$. При этом вид области определения M (т. е. ее конфигурация) тесно связан с видом самой функции f.

Выбор вида и размеров области определения производственной функции является весьма ответственной задачей. Несколько сгущая краски, можно сказать, что нет плохих производственных функций — есть плохие области определения. Вопрос об однозначном выборе области определения далек от окончательного решения. Можно отметить следующие подходы:

1) эвристический. В качестве области определения берется множество одного из указанных видов исходя из экс-

* Множество $M \subset R^n$ называется *открытым*, если у каждой точки $x \in M$ существует ε — окрестность (множество точек, отстоящих от x не более чем на ε), целиком лежащая в множестве M.

пертной информации о предполагаемых значениях показателей ресурсов в течение моделируемого периода;

2) вероятностный. На основе статистических данных в пространстве ресурсов строится «доверительная» область изменения значений показателей ресурсов, после чего в качестве области определения выбирается наименьшее из множеств M_b, покрывающее «доверительную» область;

3) теория нормальной области. Этот подход основан на качественном анализе структуры пространства ресурсов и последующей оценке параметров границ так называемой нормальной области, т. е. области, включающей в себя точки, для которых характерны нормальные пропорции между размерами ресурсов. По нашему мнению, корректное использование подавляющего большинства неоклассических производственных функций возможно только в нормальной области. Методы анализа и определения границ нормальных областей для различных классов и производственных функций излагаются в п. 2.3.4 и 2.3.5.

2.3.2. Области определения неоклассических производственных функций

Область определения неоклассической производственной функции должна обладать рядом специфических свойств, дополняющих требования а)—г) п. 2.3.1. Эти свойства связаны с «неоклассическими критериями» производственных функций (см. п. 1.3.4): а) множество M вместе с каждой точкой x должно содержать все точки вида $x' = \lambda x$, где $\lambda \geqslant 0$; б) множество M должно быть выпуклым, т.е. вместе с каждыми двумя точками x', x'' содержать все точки вида $\lambda x' + (1 - \lambda) x''$, где $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

Первое условие отвечает неоклассическому требованию однородности производственной функции, так как об однородности функции имеет смысл говорить только в случае, когда $\lambda M \subset M$ при любом $\lambda \geqslant 0$. Второе условие носит по существу интерполяционный характер: если две точки x' и x'' являются возможными значениями показателей ресурсов, то возможными также будут все «промежуточные точки» отрезка, соединяющего их. Принадлежность этих точек области определения функции также используется при формулировке условия вогнутости неоклассической производственной функции.

Вместе с условием г) п. 2.3.1 приведенные два условия выделяют класс выпуклых конусов в неотрицательном ортанте n-мерного пространства R^n_+. Каждый такой конус K будет открытым множеством, если из него исключить точ-

ку $x = 0$*. Области именно такой конфигурации мы будем в дальнейшем считать областями определения неоклассических производственных функций и называть *неоклассическими областями*.

Приведем некоторые сведения об открытых выпуклых конусах в n-мерном пространстве, полезные при выборе вида области определения неоклассической производственной функции.

Открытый выпуклый конус в n-мерном пространстве, как и любое другое множество, аналитически может быть задан в виде множества точек $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n_+$, удовлетворяющих неравенству

$$H(x_1, \ldots, x_n) < 0, \tag{2.41}$$

где H — некоторая функция от n аргументов. При этом если в точке $x \in R^n_+$ $H(x) < 0$, то и во всех точках вида λx, где $\lambda > 0$, также должно выполняться условие $H(\lambda x) < 0$. Кроме того, если $H(x') < 0$ и $H(x'') < 0$, то $H(x' + x'') < 0$. Таким условиям удовлетворяет однородная субаддитивная функция**.

Если однородная функция $H(x)$ субаддитивна и принимает как отрицательные, так и положительные значения, то степень ее однородности равна единице. Действительно, пусть $H(x') < 0$, $H(x'') > 0$. Так как $H(x + x) = 2^\gamma H(x) \leqslant 2H(x)$ для любого x, то при $x = x'$ получаем, что $2^\gamma \leqslant 2$, при $x = x''$ — что $2^\gamma \geqslant 2$, откуда $\gamma = 1$.

Каждой линейно-однородной субаддитивной функции от n переменных $H(x_1, \ldots, x_n)$ соответствует в пространстве R^n открытый выпуклый конус K, состоящий из точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$, для которых $H(x) < 0$.

Сечение выпуклого конуса в R^n_+ гиперплоскостью (т. е. пространством размерности $n - 1$) является выпуклым множеством [54]. С другой стороны, если в R^{n-1}_+ задано выпуклое непустое множество M, то ему соответствует конус в n-мерном пространстве R^n_+, получаемый путем соединения всех точек множества M с началом координат $x = 0$. Если R^{n-1} представлять как гиперплоскость, состоящую из точек вида $(1, x_2, \ldots, x_n)$, то конус K, соответствующий вы-

---

* Образующееся после такой операции множество мы в дальнейшем будем называть открытым выпуклым конусом, хотя, строго говоря, конусом оно не является.

** Функция $H(x)$ называется *субаддитивной*, если $H(x' + x'') \leqslant H(x') + H(x'')$ при любых x', x'', $x' + x''$, принадлежащих области определения H.

пуклому множеству $M \subset R_+^{n-1}$, задается как множество точек

$$K = \{(x_1, x_1x_2, \ldots, x_1 x_n) \in R_+^n \mid (x_2, \ldots, x_n) \in M\} \qquad (2.42)$$

или, что то же самое,

$$K = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R_+^n \mid \left(\frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}\right) \in M\right\}.$$

Обратная операция сопоставляет конусу $K \subset R_+^n$ множество

$$M = \{(x_1, \ldots, x_n) \in K \mid x_1 = 1\} \subset R_+^{n-1}. \qquad (2.43)$$

Вообще говоря, если фиксировать не x_1, а какую-либо другую переменную, сечения будут иными. Для определенности мы всегда будем под сечением конуса понимать его пересечение с гиперплоскостью $x_1 = 1$. Таким образом, между выпуклыми конусами в n-мерном пространстве, не лежащими в $(n-1)$-мерном пространстве, и выпуклыми множествами в $(n-1)$-мерном пространстве имеется взаимно однозначное соответствие.

Если $H(x_1, \ldots, x_n)$ — дифференцируемая вогнутая функция и $\frac{\partial H}{\partial x_1} \neq 0$, то множество

$$K = \{(x_1, \ldots, x_n) \in R_+^n \mid H(x_1, \ldots, x_n) < 0\} \qquad (2.44)$$

может быть также задано в виде

$$K = \{(x_1, \ldots, x_n) \in R_+^n \mid G(x_2, \ldots, x_n) < x_1 < F(x_2, \ldots, x_n)\}, \qquad (2.45)$$

где G — выпуклая, а F — вогнутая функции.

Рассмотрим примеры выпуклых конусов. В случае $n = 2$ всякий выпуклый конус может быть представлен в виде

$$K = \{(x_1, x_2) \in R_+^2 \mid a_1x_1 < x_2\} \qquad (2.46)$$

или в виде

$$K = \{(x_1, x_2) \in R_+^2 \mid a_1 x_1 < x_2 < a_2 x_1\}, \qquad (2.47)$$

где a_1, a_2 — неотрицательные константы, причем $a_2 \neq 0$.

Таким образом, всякий двумерный выпуклый конус ограничен лучами $x_2 = a_1x_1$, $x_2 = a_2x_1$.

Если допустить, что a_2 может принимать значение $a_2 = \infty$, то открытый выпуклый конус можно представить также в виде

$$K = \left\{(x_1, x_2) \in R_+^n \mid a_1 < \frac{x_2}{x_1} < a_2\right\}. \qquad (2.48)$$

При $n \geqslant 3$ выпуклый конус, не лежащий целиком в пространстве размерности $n-1$, образованном точками $(0, x_2, \ldots, x_n)$, определяется своим сечением в точке $x_1 = 1$.

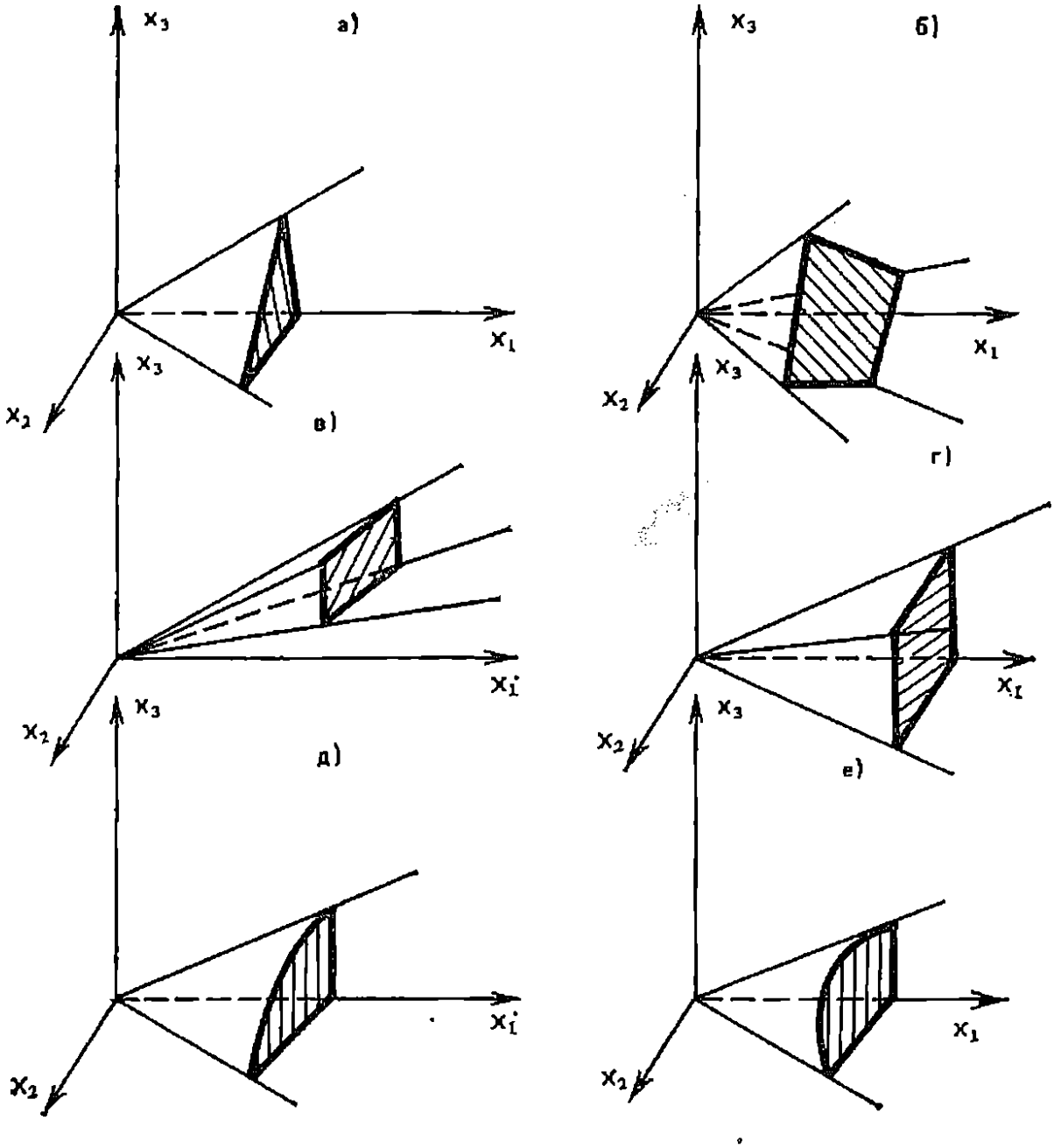


Рис. 2.13

Если выпуклое множество в сечении $x_1 = 1$ задается как множество точек, удовлетворяющих условию $H(x_2, x_3, \ldots, \ldots, x_n) < 0$, где H — некоторая функция, то конус K имеет вид

$$K = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in R_+^n \mid H\left(\frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}\right) < 0\right\}.$$

Рассмотрим наиболее важные частные случаи.

1. *Линейный конус*

$$K = \{(x_1, \ldots, x_n) \in R_+^n \mid -x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n < 0\}, \tag{2.49}$$

где $a_2, \ldots, a_n > 0$. Здесь $H(x_2, \ldots, x_n) = -1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$. Конус ограничен плоскостями положительного координатного угла, содержащими ось x, и плоскостью

$$x_1 = a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \tag{2.50}$$

(рис. 2.13, а). Конус определяется $n - 1$ параметром.

2. *Многогранный конус* общего вида

$$K = \{(x_1, \ldots, x_n) \in R^n_+ \,|\, a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n < 0, \; i = 1, \ldots, s\}. \tag{2.51}$$

Конус образован пересечением полупространств $a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n < 0$, $i = 1, \ldots, s$ (рис. 2.13, б), а функция H имеет вид

$$H = \max_{1 \leqslant i \leqslant s} (a_{i1} + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n). \tag{2.52}$$

В сечении при $x_1 = 1$ получается выпуклый многогранник произвольного вида. При $s = 1$, $a_{11} < 0$, $a_{12} > 0, \ldots, a_{1n} > 0$ многогранный конус является линейным. В общем случае многогранный конус определяется $(s \times n)$-матрицей параметров (a_{ij}).

3. *Прямоугольный* конус общего вида

$$K = \{(x_1, \ldots, x_n) \in R^n_+ \,|\, x_1a_{21} < x_2 < x_1a_{22}, \ldots, x_1a_{n1} < x_n < x_1a_{n2}\},$$

где $a_{ij} \geqslant 0$. Конус является одним из видов многогранных конусов. В сечении $x_1 = 1$ возникает параллелепипед, задаваемый двусторонними ограничениями на переменные $x_2, \ldots, x_n$: $a_{21} < x_2 < a_{22}, \ldots, a_{n1} < x_n < a_{n2}$ (рис. 2.13, *в*).

Конус K допускает также запись

$$K = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in R^n_+ \,\middle|\, \max\left(\frac{x_2}{a_{22}}, \ldots, \frac{x_n}{a_{n2}}\right) < x_1 < \min\left(\frac{x_2}{a_{21}}, \ldots, \frac{x_n}{a_{n1}}\right)\right\}. \tag{2.53}$$

4. *Ограниченный прямоугольный* конус

$$K = \{(x_1, \ldots, x_n) \in R^n_+ \,|\, x_1a_{22} > x_2, \ldots, x_1a_{n2} > x_n\},$$

где $a_{22}, \ldots, a_{n2} > 0$, является частным случаем прямоугольного конуса при $a_{21} = \ldots = a_{n1} = 0$. Параллелепипед, возникающий в сечении, примыкает вплотную к плоскостям $x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$ (рис. 2.13, г). Конус K допускает запись в виде

$$K = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in R^n_+ \,\middle|\, -x_1 + \max\left(\frac{x_2}{a_{22}}, \ldots, \frac{x_n}{a_{n2}}\right) < 0\right\}. \tag{2.54}$$

Ограниченный прямоугольный конус зависит от $n-1$ параметра.

5. *Круговой* конус

$$K=\{(x_1,\ldots,x_n)\in R^n_+ \mid -x_1^2+(ax_2)^2+\ldots+(ax_n)^2<0\} \quad (2.55)$$

ограничен координатными плоскостями и поверхностью

$$x_1=a(x_2^2+\ldots+x_n^2)^{1/2}. \quad (2.56)$$

В сечении $x_1=1$ образуется сектор шара радиуса $1/a$ (рис. 2.13, д).

Функция H для него имеет вид $H=x_2^2+\ldots+x_n^2-1/a$. Конус определяется одним параметром.

6. *Эллиптический* конус

$$K=\{(x_1,\ldots,x_n)\in R^n_+ \mid -x_1^2+(a_2x_2)^2+ \\ +\ldots+(a_nx_n)^2<0\} \quad (2.57)$$

является обобщением кругового. Отличается от него тем, что в сечении $x_1=1$ вместо сектора шара появляется сектор эллипсоида. Конус определяется $n-1$ параметром.

7. *«Сплющенный» эллиптический* конус

$$K=\{(x_1,\ldots,x_n)\in R^n_+ \mid -x_1^\beta+a_2x_2^\beta+\ldots+a_nx_n^\beta<0\}, \quad (2.58)$$

где $a_2,\ldots,a_n>0$, $\beta\geqslant 0$, представляет собой дальнейшее обобщение эллиптического конуса. В сечении $x_1=1$ получается сектор эллипсоида, как бы «сплющенного» со всех сторон (рис. 2.13, е). Ограничен координатными плоскостями и поверхностью

$$x_1=(a_2x_2^\beta+\ldots+a_nx_n^\beta)^{1/\beta}. \quad (2.59)$$

При $\beta=1$ получаем линейный конус, при $\beta=2$, $a_2=\ldots=a_n$ — круговой, при $\beta\to\infty$ — прямоугольный ограниченный конус. Конус определяется n параметрами.

8. *Ограниченный* конус общего вида. Ограниченным назовем конус

$$K=\{(x_1,\ldots,x_n)\in R^n_+ \mid -x_1+H(x_2,\ldots,x_n)<0\}, \quad (2.60)$$

где $H(x_2,\ldots,x_n)$ — неотрицательная неубывающая по каждой координате функция, определенная при $x_2\geqslant 0,\ldots,x_n\geqslant 0$. Конус ограничен координатными плоскостями и поверхностью $x_1=H(x_2,\ldots,x_n)$. Характерным для этого конуса является то, что всеми его гранями, кроме одной, служат части координатных плоскостей, содержащих ось x_1. Прямоугольный конус (2.53) является ограниченным, если $a_{22}=\infty,\ldots,a_{n2}=\infty$. Линейный, круговой, эллип-

тический и «сплющенный» эллиптические конусы также являются ограниченными.

Отметим, что все приведенные классы конусов сформированы по характеру сечения при $x_1 = 1$. Если рассматривать другую ось, группировка конусов изменится.

Поверхность (2.59), ограничивающая «сплющенный» эллиптический конус, определена функцией вида *CESM* с эластичностью замены факторов $x_2, \ldots, x_n$, равной $\sigma = 1/(1-\beta)$ (поскольку $\beta \geqslant 1$, то $\sigma < 0$). Линейный, прямоугольный ограниченный, эллиптический конусы и различные классы сплющенных эллиптических конусов могут быть получены из общего вида (2.58) путем задания уровня эластичности замены факторов σ^A для функции H: прямоугольный ограниченный конус — $\sigma = 0$; эллиптический конус — $\sigma = -1$; линейный конус — $\sigma = \infty$.

Полезно ввести для общего ограниченного конуса (2.60) понятие эластичности σ_K как эластичности замены факторов по Аллену выпуклой функции $H(x_2, \ldots, x_n)$. Тогда абсолютная величина σ_K показывает степень изогнутости «крыши» конуса — некоординатной поверхности, ограничивающей конус. Чем меньше $|\sigma_K|$, тем более изогнута эта поверхность (см. рис. 2.14).

Характеристика эластичности поверхности конуса σ_K используется при выборе конфигурации области определения производственной функции и связана с эластичностями замены переменных производственной функции $\sigma_{ij}(f)$. Так, из изложенного далее будет ясно, что если $\sigma_{ij}(f) = \sigma$ для любых $i \neq j$, то $\sigma_K = -\sigma$.

2.3.3. Понятие и основные свойства нормальной области пространства ресурсов

Рассмотрим более детально структуру пространства ресурсов $D = \mu(\mathrm{Res})$, каждая точка которого соответствует вектору значений показателей ресурсов $x_1, \ldots, x_n$. Для многих производственных систем характерно определенное соотношение между используемыми ресурсами. При этом пропорции между показателями различных видов живого и овеществленного труда задаются не однозначно, а в виде определенного интервала допуска, в пределах которого находятся соотношения между ресурсами при нормальном протекании производственных процессов.

Если соотношение ресурсов находится вне пределов этого интервала, то производство, возможно, будет функционировать, однако ресурсы будут использоваться неэффективно и производственный режим будет нестабильным. Вве-

дем следующее определение: точку $x = (x_1, \ldots, x_n) \in D$ будем считать *нормальной*, если соотношение между координатами $x_1, \ldots, x_n$ с учетом взаимозаменяемости ресурсов отвечает нормальным условиям производства. Множество нормальных точек N назовем *нормальной областью*.

Если точка $x \in D$ не принадлежит нормальной области, это означает, что либо какой-то ресурс или группа ресурсов присутствует в избытке, либо какого-то ресурса не хватает. Таким образом, множество D можно разделить на два подмножества: точки, соответствующие нормальному соотношению между ресурсами, и точки, в которых какой-либо ресурс или группа ресурсов имеется в недостаточном количестве или в избытке.

В большинстве случаев корректное использование производственной функции допустимо именно в рамках нормальной области N. Однако объективное определение ее конфигурации и границ является достаточно сложной задачей и требует особых методов, основанных на анализе свойств нормальной области. Рассмотрим некоторые из этих свойств (более подробное обоснование см. в [30]).

В пределах нормальной области можно считать, что показатели отдельных видов ресурсов $(x_1, \ldots, x_n)$ независимы, т. е. между ними нет точного функционального соотношения. Это позволяет рассматривать N как открытое множество в пространстве R^n и придавать содержательный смысл любому малому изменению $x + \Delta x$ точки $x \in N$ (если x принадлежит N, то $x + \Delta x$ также принадлежит N при достаточно малом Δx).

Поведение агрегированной экономической технологии τ в различных подмножествах ее области определения D различается. В условиях дефицита одного из видов ресурсов по отношению к остальным его увеличение должно, надо полагать, привести к значительному приросту продукции. Наоборот, в случае его избытка эффективность его увеличения должна быть близка к нулю.

Если число ресурсов равно двум, то все множество D можно разделить на три подмножества: $D = N \cup I_2 \cup J_2$, где N — нормальная область; I_2 — область избытка второго ресурса; J_2 — область дефицита второго ресурса. При этом область избытка первого J_1 ресурса совпадает с областью дефицита второго I_2 и наоборот. Обозначим через $e_2(x_1, x_2)$ какую-либо характеристику эффективности малого увеличения второго ресурса при условии, что начальной была точка x_1, x_2 (если функцию τ считать дифференцируемой, то в качестве $e_2(x_1, x_2)$ может быть взята частная (логарифмическая частная) производная τ по x_2, в противном случае—

соответствующая конечная разность). Тогда различие в поведении функции τ в областях I_2, J_2, N можно выразить соотношением $e_2(x_1, x_2) < e_2(x_1', x_2') < e_2(x_1'', x_2'')$, если $(x_1, x_2) \in I_2$, $(x_1', x_2') \in N$, $(x_1'', x_2'') \in J_2$.

В принципе это соотношение должно быть справедливо при любой разумной функции $e(x)$. Однако для разных характеристик неравенства могут проявляться более или менее отчетливо. Наиболее предпочтительными оказываются характеристики, подобные логарифмической производной; в этом случае увеличение второго ресурса на один процент приведет к наибольшему приросту выпуска в области недостатка второго ресурса и наименьшему — в области его избытка.

На основании изложенных свойств нормальной области далее определим ее конфигурацию и метод оценки параметров ее границ.

2.3.4. Конфигурация нормальной области для двухфакторных производственных функций. Двухфакторные многорежимные функции

Для двухфакторных технологий τ принадлежность точки $x = (x_1, x_2)$ нормальной области определяется величиной отношения x_2/x_1 (или x_1/x_2). Если отношение x_2/x_1 слишком мало, то количество второго ресурса недостаточно для нормального функционирования процесса и $x = (x_1, x_2)$ принадлежит области дефицита второго ресурса. Наоборот, если x_2/x_1 слишком велико, то (x_1, x_2) принадлежит области избытка второго ресурса. Таким образом, нормальными являются точки $x = (x_1, x_2)$, удовлетворяющие условию

$$a < \frac{x_2}{x_1} < b, \tag{2.61}$$

где a, b — некоторые константы, свои для каждого моделируемого процесса. Иными словами, нормальная область в двумерном случае является открытым выпуклым конусом.

Оценивание параметров a, b, определяющих границу нормальной области, может производиться в принципе двумя путями. Во-первых, с помощью анализа фактических значений ресурсов за ретроспективный период и выделения точек, резко отличающихся от остальных по пропорциям координат. При таком подходе выводы о структуре пространства ресурсов базируются только на информации об использовавшихся ресурсах. Однако этот способ обычно не приводит к желаемой цели, так как часто соотношения между ресурсами испытывают определенный дрейф, стирающий

границы между областями дефицита, избытка, нормальной областью. Второй метод, излагаемый ниже, существенно использует не только фактическую информацию о ресурсах, но и информацию о выпуске продукции. При этом параметры нормальной области оцениваются одновременно с параметрами производственной функции.

Согласно п. 2.3.3 отдача от увеличения ресурса различна в зависимости от того, принадлежат ли ресурсы к области избытка, дефицита или нормальной области. Примем в качестве меры эффективности увеличения ресурса характеристику $e_2(x_1, x_2) = \chi^1_{22}(x_1, x_2)$ производственной функции, приближенно показывающую, на сколько процентов изменится значение функции при изменении количества ресурсов x_2 на один процент (эластичность выпуска по x_2). В случае $n = 2$ нормальная область по своей конфигурации представляет собой выпуклый конус в пространстве ресурсов, которому однозначно соответствует интервал изменения отношения x_2/x_1. Для однородных функций характеристика $\chi^1_{22}(x_1, x_2)$ на самом деле зависит только от отношения x_2/x_1. Поэтому область J_2 дефицита ресурса x_2 образуют точки, для которых $\frac{x_2}{x_1} \leqslant a$, область избытка I_2 — точки, для которых $\frac{x_2}{x_1} \geqslant b$, нормальную область — оставшиеся точки, удовлетворяющие условию $a < \frac{x_2}{x_1} < b$, где $a < b$ — некоторые константы. В итоге получаем следующее описание поведения функции τ:

$$\chi^1_{22}\Big|_{\frac{x_2}{x_1} \leqslant a} \gg \chi^1_{22}\Big|_{a < \frac{x_2}{x_1} < b} \gg \chi^1_{22}\Big|_{\frac{x_2}{x_1} \geqslant b}. \qquad (2.62)$$

Теперь перед нами стоит задача построения производственной функции, которая: 1) отражала бы всю имеющуюся информацию о характере технологии в нормальной области; 2) для некоторых значений параметров $a \leqslant b$ удовлетворяла бы условию (2.62).

Как отмечалось выше, обычный способ построения производственной функции состоит в выборе наилучшей аппроксимирующей функции из параметрического класса $F = \{f\}$. Предполагая, что среди элементов $f \in F$ существует дифференцируемая функция, достаточно адекватно аппроксимирующая технологию на множестве N, мы построим новый класс функций $\widetilde{F} = \{\widetilde{f}\}$, который удовлетворяет следующим требованиям:

а) функции $\widetilde{f} \in \widetilde{F}$ определены в достаточно широкой области положительного ортанта, охватывающей предпола-

гаемую нормальную область, однородны и дважды непрерывно дифференцируемы;

б) для любых чисел $a \leqslant b$ в классе $\tilde{F}$ существует такая функция $\tilde{f}$, что при $a < \frac{x_2}{x_1} < b$ функция $\tilde{f}$ и ее частная производная по x_2 аппроксимируют соответственно некоторую функцию $f \in F$ и ее частную производную по x_2, а при $\frac{x_2}{x_1} \leqslant a$ и $\frac{x_2}{x_1} \leqslant b$ выполняется неравенство (2.62);

в) параметры a, b входят в число оцениваемых параметров функции $\tilde{f} \in \tilde{F}$.

Назовем такие функции *трехрежимными*.

Таким образом, функции класса $\tilde{F}$ в нормальной области близки к функциям класса F, а за ее пределами ведут себя в соответствии с общими свойствами производственных функций; выбор из класса $\tilde{F}$ функции $\tilde{f}_{\hat{a}}$ с наилучшими аппроксимационными свойствами путем оценки параметров по наблюдавшимся данным позволит одновременно оценить границы a, b нормальной области.

Перейдем к построению класса $\tilde{F}$ трехрежимных производственных функций, предполагая, что функции класса F являются неоклассическими.

Пусть $f \in F$. Рассмотрим множество $\bar{F}$ функций $\bar{f}$ вида

$$\bar{f}(x_1, x_2) = \begin{cases} \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^c f(x_1, x_2) & \text{при } \frac{x_2}{x_1} \leqslant a; \\ f(x_1, x_2) & \text{при } a < \frac{x_2}{x_1} < b; \\ x_1^{\gamma} & \text{при } \frac{x_2}{x_1} \geqslant b, \end{cases} \qquad (2.63)$$

где c — произвольная константа, γ — степень однородности функции f.

Функция $\bar{f}$ является однородной степени γ, кусочно-дифференцируемой, и ее логарифмическая производная χ_{22}^{1} удовлетворяет условиям (2.62).

Каждая из функций $\bar{f}$ зависит от тех же параметров, что и f, а также от двух дополнительных — a и b. Таким образом, для класса $\bar{F}$ выполняются все требуемые условия, кроме дифференцируемости функций. Чтобы удовлетворить этому последнему требованию, аппроксимируем разрывную функцию $\bar{f}$ дифференцируемой функцией $\tilde{f}$ следующим образом.

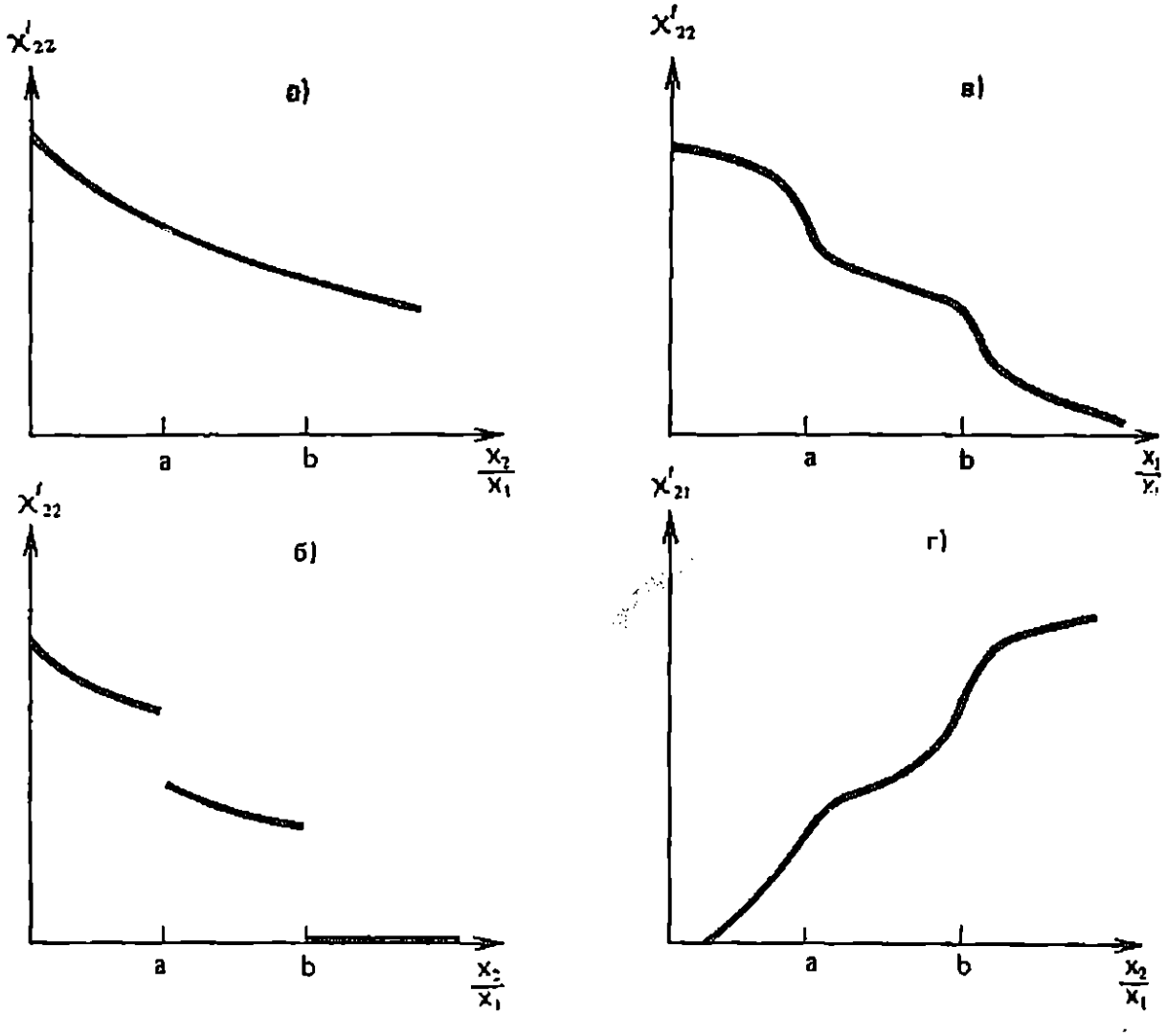


Рис. 2.14

Функция $\frac{\partial \ln \bar{f}}{\partial \ln x_2}$ получена из функции $\frac{\partial \ln f}{\partial \ln x_2}$ сдвигом вверх на константу c при $\frac{x_2}{x_1} \leqslant a$ и вниз до нуля при $\frac{x_2}{x_1} \geqslant b$ (на рис. 2.14,а изображен график эластичности функции f по x_2, на рис. 2.14,б — график эластичности функции $\bar{f}$ по x_2). Перейдем от этой трехуровневой разрывной ступенчатой функции к трехуровневой сглаженной функции вида

$$S\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = \frac{c}{1+\left(\frac{x_2}{ax_1}\right)^{\beta_1}} + \frac{\frac{\partial \ln f}{\partial \ln x_2}}{1+\left(\frac{x_2}{bx_1}\right)^{\beta_2}}, \qquad (2.64)$$

где β_1, $\beta_2 > 1$, $c > 0$ — параметры. Если $\frac{x_2}{x_1} \ll a$, то $\left(\frac{x_2}{ax_1}\right)^{\beta_1} \ll 1$, $\left(\frac{x_2}{bx_1}\right)^{\beta_2} \ll 1$ и $S\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$ близко к $c + \frac{\partial \ln f}{\partial \ln x_2}$.

Если $\frac{x_2}{x_1} > b \geqslant a$, то $1 + \left(\frac{x_2}{bx_1}\right)^{\beta_2}$ и $1 + \left(\frac{x_2}{ax_1}\right)^{\beta_1}$ относительно велики, а вся функция $S\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$ близка к нулю. Наконец, если

$$a < \frac{x_2}{x_1} < b, \text{ то } 1+\left(\frac{x_2}{bx_1}\right)^{\beta_2} \approx 1, \text{ а } \frac{c}{1+\left(\frac{x_2}{ax_1}\right)^{\beta_1}} \approx 0.$$

В итоге делаем вывод, что функция $S\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$ по характеру своего поведения соответствует требованиям, предъявляемым к $\chi_{22}^{1}(x_1, x_2)$ (рис. 2.14, в). Поскольку интервал $(0, a)$ является областью недостатка второго ресурса и одновременно избытка первого, то эластичность выпуска по первому ресурсу $\frac{\partial \ln f}{\partial \ln x_1}$ должна возрастать на этом промежутке, принимая при $\frac{x_2}{x_1} = 0$ нулевое значение (рис. 2.14, г).

Найдем теперь однородную функцию $\tilde{f}$, для которой

$$\frac{\partial \ln \tilde{f}}{\partial \ln x_2} = S\left(\frac{x_2}{x_1}\right). \tag{2.65}$$

Интегрируя (2.65) по x_2, можно доказать, что множество однородных степени γ положительных функций $\tilde{f}(x_1, x_2)$, удовлетворяющих условию (2.65), описывается как множество функций вида

$$\tilde{f}(x_1, x_2) = \alpha x_1^{\gamma} \exp \Phi\left(\frac{x_2}{x_1}\right),$$

где $\alpha > 0$ — параметр, Φ — какая-либо первообразная для функции $\frac{S(r)}{r}$*.

Поскольку

$$\int \frac{c\,dr}{r\left(1+\left(\frac{r}{a}\right)^{\beta_1}\right)} = \ln \frac{r^c}{\left(1+\left(\frac{r}{a}\right)^{\beta_1}\right)^{\frac{c}{\beta_1}}} =$$

$$= \ln\left(x_1^{-c}\left((ax_1)^{-\beta_1} + x_2^{-\beta_1}\right)^{-\frac{c}{\beta_1}}\right),$$

* Напомним, что функция $\Phi(r)$ называется *первообразной* для функции $\varphi(r)$, если $\Phi'(r) = \varphi(r)$.

то первообразная для $\frac{S(r)}{r}$ функция $\Phi(r)$ может быть записана в виде

$$\Phi(r) = \ln\left(x_1^{-c}((ax_1)^{-\beta_1} + x_2^{-\beta_1})^{-\frac{c}{\beta_1}}\right) + \Psi(r),$$

где $\Psi(r)$ — одна из первообразных для функции

$$\frac{\partial \ln f}{\partial \ln x_2} \Big/ r\left(1 + \left(\frac{r}{b}\right)^{\beta_2}\right).$$

Теперь

$$\tilde{f} = \alpha x_1^{\beta - c}((ax_1)^{-\beta_1} + x_2^{-\beta_1})^{-\frac{c}{\beta_1}} \exp \Psi\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \qquad (2.66)$$

или

$$\tilde{f} = \alpha x_1^{\gamma - c}((ax_1)^{-\beta_1} + x_2^{-\beta_2})^{-\frac{c}{\beta_1}} \exp \int \frac{\frac{\partial \ln f}{\partial \ln x_2} \, d\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{\frac{x_2}{x_1}\left(1 + \left(\frac{x_2}{bx_1}\right)^{\beta_2}\right)}.$$

Для каждой функции такого вида ее частная логарифмическая производная по второму аргументу при $\beta_1, \beta_2 \gg 1$ удовлетворяет условию (2.62).

Исходная функция $f(x_1, x_2) \in F$, естественно, также может быть записана в виде (2.66):

$$f = \alpha_0 x_1^{\gamma} \exp\left(\Theta\left(\frac{x_2}{x_1}\right)\right),$$

где $\Theta\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$ — какая-либо из первообразных функций $\frac{\partial \ln f}{\partial \ln x_2} \Big/ \frac{x_2}{x_1}$. При этом параметр α_0 определяется выбором первообразной. Поскольку при $a < \frac{x_2}{x_1} < b$ функция $S\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$ близка к $\frac{\partial \ln f}{\partial \ln x_2}$, то при любом выборе первообразной $\Theta(r)$ для функции $\frac{\partial \ln f}{\partial \ln x_2} \Big/ r$ существует первообразная $\Phi(r)$ для функции $S(r)$, которая близка к $\Theta(r)$ при $a < r < b$. Поскольку все первообразные функции $S(r)$ отличаются друг от друга на константу, то $\bar{\Phi}(r) = \Phi(r) + \delta$, где δ — подходящая константа.

Значит, существует такое значение $\bar{\alpha} = \alpha_0$ параметра α, для которого функции

$$\tilde{f} = \bar{\alpha} x_1^{\gamma} \exp \Phi\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \text{ и } f = \alpha_0 x_1^{\gamma} \exp \Theta\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$$

будут близки при $a < \frac{x_2}{x_1} < b$.

Следовательно, в классе функции (2.66) для любых $a < b$ существуют функции $\tilde{f}$, удовлетворяющие условиям (а), (б), (в).

Первообразная $\Psi(r)$ для функции $\frac{\partial \ln f}{\partial \ln x_2} \Big/ r\left(1 + \left(\frac{x_2}{bx_1}\right)^{\beta_2}\right)$ зависит от параметров b, β_2. Следовательно, трехрежимные функции (2.66) класса $\tilde{F}$ зависят от параметров, входящих в выражение для $\frac{\partial \ln f}{\partial \ln x_2}$, а также от семи дополнительных параметров: c (высота сдвига эластичности выпуска по x_2); γ (степень однородности функции $\tilde{f}$); a (левая граница нормальной области); b (правая граница нормальной области); β_1, β_2 (параметры «крутизны» спуска к нормальной области); α (свободный член). Параметры функции f должны удовлетворять следующим условиям: $0 < a < b$, $\beta_1 > 1$, $\beta_2 > 1$, $c > 0$, $\alpha > 0$, $\gamma \geqslant c + \frac{\partial \ln f}{\partial \ln x_2}(0)$.

Приведем пример построения класса трехрежимных функций $\tilde{F}$ для определения границ нормальной области в предположении, что в ее пределах процесс описывается функцией Кобба—Дугласа

$$f = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}, \text{ где } a_0, a_1, a_2 > 0.$$

Для этой функции $\frac{\partial \ln f}{\partial \ln x_2} = a_2$, поэтому

$$S\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = \frac{c}{1 + \left(\frac{x_2}{ax_1}\right)^{\beta_1}} + \frac{a_2}{1 + \left(\frac{x_2}{bx_1}\right)^{\beta_2}}.$$

Первообразная функция $\Phi\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$ для функции $S\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$ равна:

$$\Phi\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = \ln\left(x_1^{-c-a_2}\left((a_1 x_1)^{-\beta_1} + x_2^{-\beta_1}\right)^{-\frac{c}{\beta_1}} \times \right.$$

$$\left. \times \left((bx_1)^{-\beta_2} + x_2^{-\beta_2}\right)^{-\frac{a_2}{\beta_2}}\right).$$

Соответственно класс $\widetilde{F}$ состоит из функций вида

$$\widetilde{f} = \alpha x_1^{\gamma - c - a_2} ((a_1 x_1)^{-\beta} + x_2^{-\beta_1})^{-\frac{c}{\beta_1}} ((b x_1)^{-\beta_2} + x_2^{-\beta_2})^{-\frac{a_2}{\beta_2}}.$$

Как указано выше, значение $\frac{\partial \ln \widetilde{f}}{\partial \ln x_2}$ в точке $\frac{x_2}{x_1} = 0$ должно быть близко к нулевому, поэтому $\gamma = c + \frac{\partial \ln \widetilde{f}}{\partial \ln x_2}(0) = c + a_2$. Следовательно, класс функций для оценки параметров нормальной области в случае функций Кобба—Дугласа состоит из функций, являющихся произведением двух функций *CES*:

$$\widetilde{f} = \alpha ((a x_1)^{-\beta_1} + x_2^{-\beta_1})^{-\frac{c_1}{\beta_1}} ((b x_1)^{-\beta_2} + x_2^{-\beta_2})^{-\frac{c_2}{\beta_2}}.$$

Оцениванию здесь в общем случае подлежат параметры α, c_1, c_2, a, b, β_1, β_2.

Появление функции *CES* в данном контексте не случайно. Функция *CES* с эластичностью замены факторов $\sigma < 1$ представляет собой одну из *двухрежимных* производственных функций, т. е. функций, отражающих два уровня эффективности использования ресурсов. Эластичность выпуска по каждому из факторов функции *CES* при $\sigma < 1$ имеет вид сглаженной ступеньки с приближающимся к нулю нижним уровнем. Функция Кобба—Дугласа служит примером *однорежимной* функции, поскольку для нее $\chi_{22}^1 = \text{const}$. Произведение двух функций *CES* с эластичностями замены факторов, меньшими единицы, относится, как мы видели, к числу трехрежимных функций. В общем случае произведение k таких функций *CES* дает $(k+1)$-режимную производственную функцию: эластичности выпуска по каждому из ресурсов образуют сглаженные $(k+1)$-уровневые «лестницы», нижний уровень которых приближается к нулю, верхний — к степени однородности функции.

В приведенном примере оказалось возможным записать интеграл от функции $\frac{\partial \ln f}{\partial \ln x_2} \Big/ r\left(1 + \left(\frac{r}{b}\right)^{\beta_2}\right)$ аналитически, т. е. в виде формулы. Для более сложных, чем функция Кобба — Дугласа, ПФ это сделать невозможно. Тогда рекомендуется воспользоваться одним из методов численного интегрирования. Значение первообразной $\Psi\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$ от функции $\frac{\partial \ln f}{\partial \ln x_2} \Big/ \frac{x_2}{x_1}\left(1 + \left(\frac{x_2}{b x_1}\right)^{\beta_2}\right)$ может быть вычислено с помощью определенного интеграла по формуле

$$\int\limits_{r_0}^{\frac{x_2}{x_1}} \frac{\frac{\partial \ln f}{\partial \ln x_2}\, dr}{r\left(1+\left(\frac{r}{b}\right)^{\beta_2}\right)} = \Psi\left(\frac{x_2}{x_1}\right) - \Psi(r_0), \qquad (2.67)$$

где r_0 — произвольная точка. На практике эту точку лучше выбирать исходя из условия $r_0 < \min\limits_{1 \leqslant t \leqslant T} \frac{x_2(t)}{x_1(t)}$, где $x_1(t)$, $x_2(t)$ — наблюдавшиеся значения переменных x_1, x_2 в моменты $t = 1, \ldots, T$. Тогда

$$f = \alpha x_1^{\gamma - c}\left((\alpha x_1)^{-\beta_1} + x_2^{-\beta_1}\right)^{-\frac{c}{\beta_1}} \times$$

$$\times \exp \int\limits_{r_0}^{\frac{x_2}{x_1}} \frac{\frac{\partial \ln f}{\partial \ln x_2}\, dr}{r\left(1+\left(\frac{r}{b}\right)^{\beta}\right)}. \qquad (2.68)$$

2.3.5. Конфигурация нормальной области для многофакторных производственных функций Многофакторные многорежимные функции

Рассмотрим теперь случай, когда число факторов больше двух. По-прежнему нормальную область составляют точки, в которых координаты $x_1, \ldots, x_n$ находятся в «правильной» для данного производства пропорции. Однако дополнение к нормальной области в общем случае не может быть разбито на множества дефицита или избытка какого-либо ресурса. Для определения структуры множества $D \setminus N$ примем некоторые дополнительные предположения. Как указано в п. 1.2.3, ресурсы, учитываемые при исследовании функции τ, не одинаковы по характеру своего участия в процессе производства. Между видами ресурсов существует некоторая иерархия, в которой отдельные виды выделяются как наиболее важные [20]. Предположим, что среди этих наиболее важных ресурсов существует один вид ресурсов, запасы которого определяют производственный потенциал системы. Этот вид ресурсов назовем *определяющим*. Использование запасов определяющего ресурса должно быть максимально эффективным, поэтому вопрос о дефицитности остальных ресурсов решается в зависимости от того, достаточно ли их для нормального использования определяющего ресурса.

Будем считать, что определяющий ресурс имеет номер 1. Тогда возможны три взаимоисключающие ситуации: либо запасы ресурсов $x_2, \ldots, x_n$ с учетом их взаимозаменяемости недостаточны для полного использования ресурса x_1 и тогда точка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ принадлежит области дефицита, либо ресурсы $x_2, \ldots, x_n$ имеются в избыточном количестве и точка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ принадлежит области избытка, либо точка $(x_1, \ldots, x_n)$ относится к нормальной области. Рассмотрим сначала случай, когда заменяемость между $x_2, \ldots, x_n$ отсутствует, тогда можно говорить о недостатке каждого из ресурсов $x_2, \ldots, x_n$ в отдельности, так как недостаточное количество i-го ресурса не компенсируется другими ресурсами и степень дефицитности непосредственно характеризуется величиной отношения x_i/x_1. Область дефицита i-го ресурса J_i включает в себя все точки $(x_1, \ldots, x_n)$, в которых $\frac{x_i}{x_1} \leqslant a_i$, где a_i — константа. Если же $\frac{x_i}{x_1} > b_i$, где b_i — соответствующая константа, то запас i-го ресурса избыточен. Таким образом, в условиях невзаимозаменяемости ресурсов $x_2, \ldots, x_n$ нормальная область i-го ресурса

$$N_i = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in R_+^n \mid a_i < \frac{x_i}{x_1} < b_i\right\}, \; i = 2, \ldots, n; \quad (2.69)$$

область дефицита —

$$J_i = \left\{(x_1, \ldots x_n) \in R_+^n \mid a_i \geqslant \frac{x_i}{x_1}\right\}, \; i = 2, \ldots, n; \quad (2.70)$$

область избытка —

$$I_i = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in R_+^n \mid b_i \leqslant \frac{x_i}{x_1}\right\}, \; i = 2, \ldots, n. \quad (2.71)$$

Все множество D представимо для каждого $i = 2, \ldots, n$ в виде

$$D = N_i \cup I_i \cup J_i. \quad (2.72)$$

Пересечение нормальных областей для всех ресурсов образует нормальную область

$$N = \left\{(x_2, \ldots, x_n) \in R_+^n \mid a_i < \frac{x_i}{x_1} < b_i, \; i = 2, \ldots, n\right\}, \quad (2.73)$$

в которой соотношения между ресурсами соответствуют нормальным для данного производства пропорциям. Дополнение к этому множеству состоит из множеств вида $I_i \cup J_i$, т. е.

$$D = N \cup I_2 \cup J_2 \cup \ldots \cup I_n \cup J_n. \quad (2.74)$$

При этом отдельные множества $I_i \cup J_i$ могут пересекаться между собой.

Теперь рассмотрим общий случай, когда между ресурсами $x_2, \ldots, x_n$ возможна взаимозаменяемость. Первый ресурс по-прежнему будем считать определяющим.

В условиях взаимозаменяемости ресурсов $x_2, \ldots, x_n$ говорить о дефиците отдельного ресурса x_k, $k \geqslant 2$, нельзя, так как его недостаток в принципе может быть восполнен за счет других ресурсов x_i, $i \neq k$, $i \geqslant 2$. Следовательно, по отношению к ресурсу x_1 имеет смысл понятие дефицита или избытка только для всех ресурсов $x_2, \ldots, x_n$ в совокупности. Поскольку во взаимодействие с первым ресурсом может вступать любой ресурс $x_2, \ldots, x_n$, оценка производственного потенциала этих ресурсов должна выражаться некоторой функцией $\xi(x_2, \ldots, x_n)$, которая и определяет совокупный «объем» этих ресурсов. Соответственно технология τ, зависящая, вообще говоря, произвольным образом от аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, в рассматриваемом случае представима в виде суперпозиции функции ξ от $(n-1)$-го переменного $x_2, \ldots, x_n$ и функции от двух переменных $\theta(x_1, \xi)$

$$\tau(x_1, \ldots, x_n) = \theta(x_1, \xi(x_2, \ldots, x_n)). \tag{2.75}$$

Например, если речь идет о функции постоянной эластичности замены по Михалевскому *CESM*

$$y = (a_1 x_1^b + \ldots + a_n x_n^b)^{\nu/b}, \tag{2.76}$$

то указанное представление задается функциями:

$$\theta(x_1, \xi) = (a_1 x_1^b + \xi^b)^{\nu/b}; \tag{2.77}$$

$$\xi(x_2, \ldots, x_n) = (a_2 x_2^b + \ldots + a_n x_n^b)^{1/b}$$

(см. п. 2.2.4). Здесь θ и ξ являются функциями с постоянной и одинаковой с функцией (2.76) эластичностью замены.

Поскольку функция $\xi(x_2, \ldots, x_n)$ выражает потенциал ресурсов $x_2, \ldots, x_n$, вопрос о дефицитности ресурсов $x_2, \ldots, x_n$ решается в зависимости от соотношения величины ξ и размера определяющего ресурса x_1. Следовательно, область дефицита задается условием

$$\frac{\xi(x_2, \ldots, x_n)}{x_1} \leqslant a, \tag{2.78}$$

где a — константа. Пусть

$$J^a = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in R_+^n \mid \frac{\xi(x_2, \ldots, x_n)}{x_1} \leqslant a\right\}.$$

Представление технологии τ в виде $\tau = \theta(x_1, \xi(x_2, \ldots, x_n))$ может быть неоднозначным, однако если τ и ξ — однородные функции, причем ξ — однородная первой степени, θ — возрастающая, то определение области дефицита корректно и не зависит от конкретного представления функции как суперпозиции функций θ и ξ.

Перейдем к анализу конфигурации области избытка ресурсов $x_2, \ldots, x_n$. Наиболее естественное предположение о том, что область избытка состоит из точек, для которых $\frac{\xi(x_2, \ldots, x_n)}{x_1} \geqslant b$, где b — некоторая константа, приходится отвергнуть по следующим причинам. Во-первых, в этом случае не обеспечивается выпуклость нормальной области $N = \{(x_1, \ldots, x_n) \in R_+^n \mid a < \frac{\xi(x_2, \ldots, x_n)}{x_1} < b\}$, поскольку функция внутрисистемной оценки ξ ресурсов вогнута. Во-вторых, из общих соображений ясно, что определить точную границу области избытка ресурсов, пользуясь только информацией о поведении самой моделируемой системы, вряд ли возможно. К избытку ресурсов любая производственная система, как правило, менее чувствительна, чем к их недостатку.

Динамику развития реальной производственной системы определяют две группы факторов. С одной стороны, интересы развития системы требуют расширения ее производственных мощностей, вовлечения в производство дополнительных количеств ресурсов. В конечном счете при условии роста эффективности их использования это ведет к повышению размеров прибыли, фондов экономического стимулирования и т. д.

С другой стороны, существует ряд внешних факторов, препятствующих расширению размеров системы. К этим факторам относятся ограниченность народнохозяйственной потребности в продукции объединения, наличие лимитов ресурсов, выделяемых данной системе, введение платы за производственные фонды, сверхнормативные запасы товарно-материальных ценностей и т. д.

Следовательно, вывод о *недостаточности* ресурсов $x_2, \ldots, x_n$ при данном количестве определяющего ресурса x_1 можно сделать на основе анализа технологии работы самой системы, что же касается заключения об их *избыточности*, то здесь необходимо учитывать их ценность не только для самой системы, но и для народного хозяйства в целом*.

* Соображения такого рода играют важную роль при отборе вариантов развития производства с точки зрения их народнохозяйственного эффекта.

Рассмотрим вопрос о количественной оценке полезности (ценности) данного набора ресурсов $x_1, \ldots, x_n$ в отдельности для локальной производственной системы и для народного хозяйства. Обозначим через $u(x_1, \ldots, x_n)$ величину *суммарной оценки ресурсов* $x_1, \ldots, x_n$ для анализируемой системы. Поскольку основной ее функцией является преобразование ресурсов $x_1, \ldots, x_n$ в продукцию, суммарной оценкой этих ресурсов будет соответствующий объем продукции y. Поэтому $u(x_1, \ldots, x_n) = \tau(x_1, \ldots, x_n)$. Если же функция τ допускает представление в виде (2.75), то функцией полезности ресурсов $x_2, \ldots, x_n$ будет функция $\xi(x_2, \ldots, x_n)$.

Теперь рассмотрим вопрос об оценке ресурсов $x_1, \ldots, x_n$ с народнохозяйственной точки зрения. Передавая эти ресурсы в распоряжение данной производственной системы, государство изымает их из хозяйственного оборота, лишается возможности непосредственно управлять ими, направить их в какую-либо другую систему. Для народного хозяйства в целом оценка ресурсов $x_1, \ldots, x_n$ будет иной, чем для самой производственной системы. Величина этой оценки выражает суммарные потери, с которыми связано изъятие данных ресурсов из хозяйственного оборота. Обозначим через $v(x_1, \ldots, x_n)$ *народнохозяйственную оценку потерь* от передачи ресурсов $x_1, \ldots, x_n$. Передавая ресурсы $x_1, \ldots, x_n$ в распоряжение самостоятельной производственной системы, народное хозяйство стремится свести к минимуму свои потери, т. е. минимизировать $v(x)$.

Различие между $u(x)$ и $v(x)$ обусловлено несколькими причинами. Во-первых, для системы с супераддитивной (в частности, с классической) производственной функцией отвлечение части ресурсов и передача их другой системе с такой же производственной функцией не компенсируется обычно передачей первой системе полученного во второй системе продукта (неэффективность дробления ресурсов). Наоборот, пока ресурсы не переданы локальной системе, они могут быть присоединены к уже функционирующим ресурсам, что (опять же ввиду вогнутости производственной функции) способно дать положительный эффект. Кроме того, данный набор ресурсов $x_1, \ldots, x_n$ может быть неоптимальным для конкретной системы по пропорциям между ресурсами отдельных видов. Поскольку в народном хозяйстве функционирует одновременно большое число различных производственных систем, становится возможным направление этих ресурсов в такую систему, где они будут использованы оптимальным образом. Можно привести и другие обоснования несовпадения величин $u(x)$ и $v(x)$.

В качестве примера конкретной функции потерь рассмотрим простейший случай, когда заменяемость между ресурсами $x_1, \ldots, x_n$ отсутствует. Тогда производственная функция и внутрисистемная функция оценки ресурсов $u(x_1, \ldots, x_n)$ имеют вид

$$y = u = \min(x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n). \tag{2.79}$$

Народнохозяйственная функция потерь $v(x_1, \ldots, x_n)$ в этом случае равна:

$$v = \max(x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n). \tag{2.80}$$

Действительно, пусть для определенности $\max(x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n) = x_1/a_1$. Тогда исключение ресурсов $x_1, \ldots, x_n$ из народнохозяйственного оборота в наихудшем случае может привести к тому, что не будет выпущена продукция в размере x_1/a_1. Этот наихудший случай возникает, если в распоряжении государства остальные ресурсы $x_2, \ldots, x_n$ окажутся в количестве, при котором первый ресурс станет лимитирующим.

Построение и детальный анализ свойств функции народнохозяйственных потерь $v(x)$ требуют привлечения значительной информации по народному хозяйству в целом и выходят за рамки настоящей работы, посвященной в основном анализу локальных производственных систем. Представляется разумным, чтобы функция потерь $v(x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяла следующим условиям:

1) функция $v(x_1, \ldots, x_n)$ является выпуклой;

2) эластичность замены аргументов функции $v(x_1, \ldots, x_n)$ определяется эластичностью замены факторов в локальной функции потенциала $u(x_1, \ldots, x_n)$, равна ей по абсолютной величине и противоположна по знаку;

3) $v(x_1, \ldots, x_n) \geqslant u(x_1, \ldots, x_n)$, причем $v(x_1, \ldots, x_n) = u(x_1, \ldots, x_n)$, если $x_1 : x_2 : \ldots : x_n = d_1 : \ldots : d_n$, где $d_1, \ldots, d_n$ — заданные числа;

4) степень однородности функции $v(x_1, \ldots, x_n)$ равна степени однородности функции $u(x_1, \ldots, x_n)$.

Из этих условий вытекает, в частности, что если локальной функцией потенциала ресурсов является функция Кобба — Дугласа

$$u = a_0 x_1^{1/2} x_2^{1/2}, \tag{2.81}$$

то функция потерь при $d_1 = d_2$ имеет вид

$$v = a_0 \left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \right)^{1/2}. \tag{2.82}$$

Вообще, если локальная функция потенциала — функция с постоянной эластичностью замены, то такой же вид имеет и функция потерь.

Свойства функции потерь определяются свойствами производственной функции и служат как бы их зеркальными отражениями.

Если локальная функция полезности $u(x)$ представлена в виде $u = u(x_1, \xi(x_2, \ldots, x_n))$ для некоторой функции ξ, то аналогичное представление, видимо, должна допускать и функция потерь

$$v = v(x_1, \Psi(x_2, \ldots, x_n)), \tag{2.83}$$

где функция Ψ выражает оценку потерь от исключения из оборота ресурсов $x_2, \ldots, x_n$. Условие избыточности ресурсов $x_2, \ldots, x_n$ выражается тогда в виде

$$\frac{\Psi(x_2, \ldots, x_n)}{x_1} \geqslant b, \tag{2.84}$$

где b — соответствующая константа.

В итоге нормальная область в пространстве ресурсов задается условиями

$$a < \frac{\xi(x_2, \ldots, x_n)}{x_1}, \quad \frac{\Psi(x_2, \ldots, x_n)}{x_1} < b. \tag{2.85}$$

В частном случае, когда технологическая функция имеет вид функции с постоянной эластичностью замены, нормальная область имеет вид

$$N = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in R_+^n \mid a < \frac{((a_2 x_2)^\beta + \ldots + (a_n x_n)^\beta)^{1/\beta}}{x_1}, \right.$$
$$\left. \frac{((a_2 x_2)^{2-\beta} + \ldots + (a_n x_n)^{2-\beta})^{1/(2-\beta)}}{x_1} < b \right\}. \tag{2.86}$$

Если же эластичность замены между $x_2, \ldots, x_n$ равна нулю, то

$$\xi(x_2, \ldots, x_n) = \min(x_2/a_2, \ldots, x_n/a_n),$$
$$\Psi(x_2, \ldots, x_n) = \max(x_2/a_2, \ldots, x_n/a_n).$$

В этом случае нормальная область задается условиями

$$a < \frac{x_2}{a_2 x_1}, \ldots, a < \frac{x_n}{a_n x_n}, \quad \frac{x_2}{a_2 x_1} < b, \ldots, \frac{x_n}{a_n x_n} < b$$

или

$$aa_2 < \frac{x_2}{x_1} < bb_2, \ldots, aa_n < \frac{x_n}{x_1} < bb_n.$$

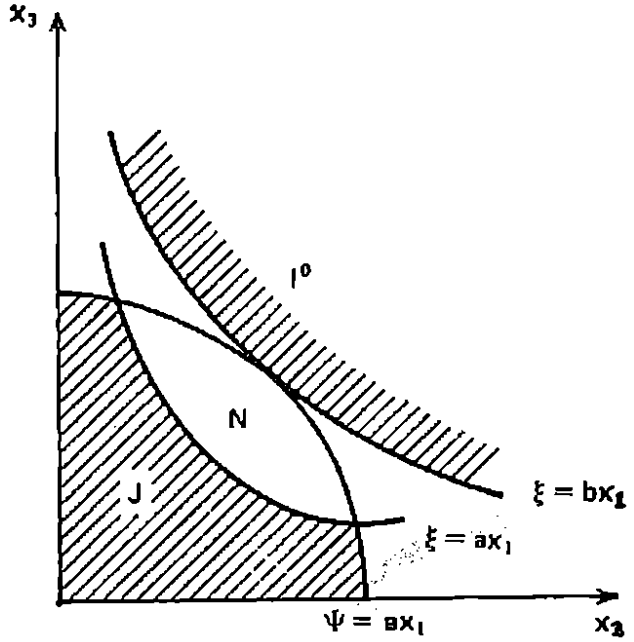


Рис. 2.15

Таким образом, в случае нулевой эластичности замены мы пришли к той же конфигурации нормальной области (2.73), которая была выведена выше. Перейдем к проблеме оценивания параметров, определяющих границы нормальной области.

Пусть F — класс n-факторных производственных функций, который предполагается использовать для моделирования производственного процесса в нормальной области.

Будем считать, что среди ресурсов $x_1, \ldots, x_n$ существует определяющий ресурс x_1, а функция f представима в виде суперпозиции двух функций — функции ξ от $(n-1)$-й переменной $x_2, \ldots, x_n$ и функции θ от двух переменных (x_1, ξ):

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \theta(x_1, \xi(x_2, \ldots, x_n)). \qquad (2.87)$$

Поскольку функция ξ в этом случае играет роль внутрисистемной оценки производственного потенциала ресурсов $x_2, \ldots, x_n$, вопрос о дефицитности вспомогательных ресурсов решается исключительно в зависимости от соотношения величины ξ и размеров определяющего ресурса x_1. Следовательно, область J дефицита вспомогательных ресурсов $x_2, \ldots, x_n$ в пространстве R^n_+ состоит из тех точек, для которых

$$\frac{\xi(x_2, \ldots, x_n)}{x_1} \leqslant a, \qquad (2.88)$$

где a — некоторая константа.

Область избытка вспомогательных ресурсов определяется как

$$I = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in R^n_+ \mid \frac{\Psi(x_2, \ldots, x_n)}{x_1} \geqslant b \right\}, \qquad (2.89)$$

где $\Psi(x_2, \ldots, x_n)$ — народнохозяйственная функция потерь; b — некоторая константа. Однако в силу неравенства $\Psi(x_2, \ldots, x_n) \geqslant \xi(x_2, \ldots, x_n)$ точки, в которых $\frac{\xi(x_2, \ldots, x_n)}{x_1} \geqslant b$, заведомо принадлежат множеству избытка I. Поэтому для получения первого приближения оценки границ области избытка мы будем пользоваться функцией ξ и условием избыточности вспомогательных ресурсов в виде

$$\frac{\xi(x_2, \ldots, x_n)}{x_1} \geqslant b. \qquad (2.90)$$

После приближенной оценки параметров a и b нормальной областью в пространстве ресурсов $x_1, \ldots, x_n$ будем считать множество точек

$$N = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in R^n_+ \mid a < \frac{\xi(x_2, \ldots, x_n)}{x_1}, \right.$$
$$\left. \frac{\Psi(x_2, \ldots, x_n)}{x_1} < b \right\} \qquad (2.91)$$

(рис. 2.15). Легко видеть, что множество N выпукло.

Благодаря представлению (2.87) дальнейшая задача построения производственной функции, удовлетворяющей условиям заданного поведения в различных областях пространства ресурсов, решается аналогично двухфакторному случаю. На основе класса F строится класс n-факторных функций $\widetilde{F} = \{\widetilde{f}\}$, элементы которого удовлетворяют следующим требованиям: в нормальной области N функция $\widetilde{f}$ близка к некоторой функции $f \in F$; в области избытка влияние увеличения ресурсов $x_2, \ldots, x_n$ на прирост выпуска существенно уменьшается, в области дефицита — увеличивается. Представление функции f в виде суперпозиции функций θ и ξ дает возможность использовать результаты, полученные в п. 2.3.4 при построении класса $\widetilde{F}$ для двухфакторных функций.

Поскольку

$$\frac{\partial \ln f}{\partial \ln \xi} = \sum_{i=2}^{n} \frac{\partial \ln f}{\partial \ln x_i} \Bigg/ \frac{\partial \ln \xi(x_2, \ldots, x_n)}{\partial \ln x_i},$$

то согласно формуле (2.66)

$$\tilde{f} = a_0 x_1^{\gamma - c}((ax_1)^{-\beta_1} + \xi(x_2, \ldots, x_n)^{-\beta_1})^{-c/\beta_1} \times$$

$$\times \exp \int \frac{\sum_{i=2}^{n} \frac{\partial \ln f}{\partial \ln x_0} \Big/ \frac{\partial \ln \xi(x_2, \ldots, x_n)}{\partial \ln x_i} \cdot d\frac{\xi}{x}}{\frac{\xi(x_2, \ldots, x_n)}{x_1}\left(1 + \left(\frac{\xi(x_2, \ldots, x_n)}{bx_1}\right)^{\beta_2}\right)} \cdot \quad (2.92)$$

Параметры a_0, γ, a, b, β_1, c подлежат оцениванию по статистическим данным.

В качестве примера рассмотрим класс трехфакторных производственных функций Кобба — Дугласа $F = \{a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} x_3^{a_3}\}$. Для функции $f = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} x_3^{a_3}$ представление функции в виде суперпозиции (2.87) задается функциями:

$$\xi(x_2, x_3) = x_2^{a_2/(a_2+a_3)} x_3^{a_3/a_2+a_3};$$

$$\theta(x_1, \xi) = a_0 x_1^{a_1} \xi^{a_2+a_3}.$$

Класс функций $\tilde{F}$ состоит из функций вида

$$\tilde{f} = a_0((ax_1)^{-\beta_1} + x_2^{a_2\beta_1/(a_2+a_3)} x_3^{a_3\beta_1/(a_2+a_3)})^{-c_1/\beta_1} \times$$

$$\times ((bx_1)^{-\beta_2} + x_2^{a_2\beta_2/(a_2+a_3)} x_3^{a_3\beta_2/(a_2+a_3)})^{-c_2/\beta_2}.$$

Область дефицита имеет вид

$$J = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in R_+^3 \,\Big|\, \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\frac{a_2}{a_2+a_3}} \left(\frac{x_3}{x_1}\right)^{\frac{a_3}{a_2+a_3}} \leqslant a\right\}.$$

Область избытка в первом приближении

$$I^0 = \left\{(x_1\, x_2, x_3) \in R_+^3 \,\Big|\, \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\frac{a_2}{a_2+a_3}} \left(\frac{x_3}{x_1}\right)^{\frac{a_3}{a_2+a_3}} > b\right\}.$$

В случае функции Кобба — Дугласа функция народнохозяйственных потерь представляет собой, как указывалось в п. 2.3.4, корень квадратный из суммы квадратов показателей ресурсов:

$$\Psi(x_2, x_3) = (\alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2)^{1/2},$$

где коэффициенты α_2, α_3 определяются из соображений народнохозяйственной значимости ресурсов при выполнении условий:

$$\Psi(x_2, x_3) \geqslant \xi(x_2, x_3);$$

$$\Psi(x_2', x_3') = \xi(x_2', x_3')$$

при некоторых x_2', x_3'.

Теперь нормальная область имеет вид

$$N = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in R_+^3 \mid a < \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\frac{a_2}{a_2+a_3}} \left(\frac{x_3}{x_1}\right)^{\frac{a_3}{a_2+a_3}}, \right.$$

$$\left. \alpha_2 \left(\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 + \alpha_3 \left(\frac{x_3}{x_1}\right)^2\right)^{1/2} < b \right\}$$

или

$$N = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in R_+^3 \mid \frac{(\alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2)^{1/2}}{b} < x_1 < \right.$$

$$\left. < \frac{x_2^{\frac{a_2}{a_2+a_3}} x_3^{\frac{a_3}{a_2+a_3}}}{a} \right\}.$$

2.4. КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ

2.4.1. Принципы формирования критериев оценки параметров

Обычно отношение ρ_τ, определяющее правила сравнения пробных функций $f_a(x)$ по их близости к агрегированной экономической технологии τ, строится, как указывалось в п. 1.2.6, в виде $\rho_\tau = \varphi_\tau \cap \psi_\tau$, где φ_τ — отношение принадлежности к некоторому классу функций (множеству функций одного «вида»); ψ_τ — отношение частичного порядка на этом множестве. В большинстве случаев ψ_τ задается с помощью числовой функции Q_τ, которая для каждого вектора параметров a показывает степень близости данной пробной функции $f_a(x)$ к функции τ. Исходную информацию для сравнения $f_a(x)$ и $\tau(x)$ доставляют, с одной стороны, известные характеристики χ_{ijk}^l функций f_a и τ, с другой — сведения о целях построения функции и сфере ее применения.

Для каждой известной характеристики $\chi_{ijk}^l(\tau)$ функции τ могут быть вычислены соответствующая характеристика $\chi_{ijk}^l(f)$ функции f и показатель их расхождения

$$\varkappa_{ijk}^l = \begin{cases} |\chi_{ijk}^l(\tau) - \chi_{ijk}^l(f)|, \text{ если нежелательны отклонения в обе стороны;} \\ \frac{1}{2}\left(\pm(\chi_{ijk}^l(\tau) - \chi_{ijk}^l(f)) + |\chi_{ijk}^l(\tau) - \chi_{ijk}^l(f)|\right), \text{ если нежелательны отклонения только в одну сторону (см. п. 1.3.3).} \end{cases}$$

Значения этих показателей отклонения функции f от функции τ зависят от вектора параметров a и служат критериями «качества» данного вектора параметров. Оценка (расчет) параметров требует, вообще говоря, решения многокритериальной задачи математического программирования

$$\varkappa^l_{ijk} \to \min. \tag{2.93}$$

Число критериев в этой задаче зависит от того, сколько и какие характеристики технологии известны при построении производственной функции. Наименьшее возможное число критериев равно числу наблюдавшихся значений показателей y, x_1, ..., x_n, т. е. числу точек множества $M_{\text{набл}}$. Если же кроме значений $y(t)$ в наблюдавшихся точках $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$, $t = 1, \ldots, T$, известны другие характеристики технологии, в частности данные о границах изменения функции τ в том или ином подмножестве области определения, то число критериев в исходной постановке задачи оценки параметров может неограниченно возрасти.

Для решения этой задачи критерии $\varkappa^l_{ijk}$ (2.93) объединяют в единый критерий с помощью функции свертки $Q(\{\varkappa^l_{ijk}\})$, после чего решается однокритериальная задача

$$Q(\{\varkappa^l_{ijk}\}) \to \min. \tag{2.94}$$

Функцию Q подбирают с таким расчетом, чтобы минимизация значений Q автоматически приводила к уменьшению значений $\varkappa^l_{ijk}$. Для этого в качестве Q берется неотрицательная возрастающая по каждому аргументу функция, равная нулю в точке $\varkappa^l_{ijk} = 0$. Различия в степени влияния каждого из аргументов $\varkappa^l_{ijk}$ на Q регулируются с помощью параметров свертки (обозначим их вектор через α).

Таким образом, задача формирования критерия оценки параметров производственной функции сводится к построению функции свертки Q частных критериев (2.93). Так же как и при построении производственной функции, для этого придется определить состав аргументов, общий вид функции Q и ее параметры.

Состав аргументов критерия Q, так же как и его вид, определяется на основе имеющейся информации об агрегированной технологии τ и целями моделирования. В принципе в число аргументов Q могут быть включены любые известные показатели $\varkappa^l_{ijk}$ отклонений характеристик функций f и τ. Однако для каждой конкретной задачи существу-

ет обязательный набор аргументов функции Q. В п. 1.3 характеристики производственного процесса, а вместе с ними характеристики функций f и τ разбиты на три группы— характеристики нулевого, первого и второго порядка. Соответственно делятся и показатели отклонений этих характеристик для f и τ. Если производственная функция $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ предназначена для прогнозирования или анализа самих значений выходного показателя y при тех или иных заданных значениях аргументов $x_1, \ldots, x_n$, то при оценке ее параметров следует стремиться к сближению значений функций f и τ, в данных точках, поэтому в число аргументов критерия Q обязательно должны включаться отклонения характеристик нулевого поряка $\varkappa^0_{ijk}$, в том числе — $\varkappa^0_{it}$, $t = 1, \ldots, T$.

Если же ставится задача прогноза или анализа не самого показателя y, а его изменений, вызванных вариациями $x_1, \ldots, x_n$, то в число аргументов Q следует обязательно включать характеристики $\varkappa^1_{ijk}$ первого порядка. То же самое относится и к случаю, когда ставится задача анализа тех параметров производственной функции, которые непосредственно выражаются через значения ее частных производных первого порядка. Наконец, для прогнозирования или анализа характеристик производственного процесса второго порядка (т. е. динамики характеристик первого порядка) необходимо в состав аргументов Q включать характеристики $\varkappa^2_{ijk}$ второго порядка. То же относится и к случаю, когда целью является определение параметров производственной функции, отражающих ее производные второго порядка (например, эластичности замены факторов).

Обычно каждому аргументу $\varkappa^l_{ijk}$ функции Q соответствует параметр α^l_{ijk}, определяющий относительный «вес» $\varkappa^l_{ijk}$ и его влияние на Q. Этот параметр α^l_{ijk} входит в функцию Q либо в виде произведения на переменную $\varkappa^l_{ijk}$, либо в качестве показателя степени $(\varkappa^l_{ijk})^{\alpha^l_{ijk}}$. Далее все множество переменных $\{\varkappa^l_{ijk}\}$ делится на две группы. Для одной из них веса α^l_{ijk} полагаются бесконечными (или равными достаточно большему числу), для другой они сравнительно невелики. Тогда значения переменных первой группы будут оказывать доминирующее воздействие на величину интегрального критерия Q, а соответствующие критерии $\varkappa^l_{ijk} \to \min$ превратятся в безусловные ограничения $\varkappa^l_{ijk} = 0$.

В большинстве расчетов бесконечные веса приписывают всем критериям, кроме тех, которые характеризуют отклоне-

ния значений функции от наблюдавшихся значений технологии. Как правило, именно величины $\varkappa_{1t}^0$, $t = 1, \ldots, T$, и являются основными аргументами интегрального критерия Q.

Рассмотрим более подробно возможности и применяемые способы свертки этих показателей. Во многих практических расчетах в качестве функции свертки критериев $\varkappa_{11}^0, \ldots, \varkappa_{1T}^0$ берется сумма квадратов

$$Q(u_1, \ldots, u_T) = u_1^2 + \ldots + u_T^2, \qquad (2.95)$$
$$u_t = \varkappa_{1t}^0, \quad t = 1, \ldots, T.$$

Этот выбор обосновывается следующим образом. Объем выпуска продукции в период t $y(t)$ рассматривается как случайная величина, а производственная функция $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ — как математическое ожидание этой величины в ситуации, когда фиксированы ресурсные показатели $x_1, \ldots, x_n$ [24]. Для линейной производственной функции в рамках этой концепции теорема Гаусса — Маркова или соображения, вытекающие из принципа наибольшего правдоподобия при условии нормальности распределения ошибок (для производственной функции произвольного вида), приводят, как известно, к методу наименьших квадратов (мнк). Высказываются, однако, аргументы и в пользу метода наименьших модулей (мнм), где выражение для Q вида

$$Q = u_1 + \ldots + u_T \qquad (2.96)$$

также выводится из принципа наибольшего правдоподобия при других гипотезах о характере распределения ошибок [49]. Известны также минимаксные методы оценивания (чебышевская аппроксимация, мча), основанные на критерии вида

$$Q = \max(u_1, \ldots, u_T). \qquad (2.97)$$

Вопрос о выборе того или иного критерия оптимальности оценки параметров не решается, следовательно, однозначно в рамках теоретико-вероятностного подхода к производственной функции, который, заметим, и сам по себе нуждается в специальном обосновании (см. например, [64]).

Ниже изложен иной подход к формированию критерия оценки параметров производственной функции, основанный на концепции адаптивного критерия.

В общем случае, когда деятельность некоторой системы описывается набором более или менее однородных показателей $u_1, \ldots, u_T$, построение интегральной характеристики

ее работы производится на основе информации о взаимной приоритетности (относительной важности) показателей $u_1, \ldots, u_T$ при оценке деятельности системы и роли каждого показателя в формировании интегральной оценки. Количественно приоритетность может выражаться, например, утверждениями типа «показатель u_i в α_{ij} раз важнее для оценки системы, чем показатель u_j». Распространен также способ упорядочения путем балльного шкалирования показателей, в котором каждый показатель получает определенный балл соответственно его важности. Этот способ также приводит к определенным коэффициентам относительной важности α_{ij}. Приоритетность показателей устанавливается независимо от последующей свертки их в обобщенный показатель и по существу представляет собой выравнивание приращений показателей. Смысл утверждения об относительной важности показателя u_i по сравнению с показателем u_j состоит не в том, что первый показатель сам по себе важнее второго, а в том, что изменение u_i в нужном направлении на единицу в α_{ij} раз ценнее, чем такое же изменение u_j. Исходной точкой при этом (при постоянных α_{ij}) должны быть равные значения u_i и u_j.

Каким образом используются априорные коэффициенты относительной приоритетности при построении обобщенного показателя $Q(u_1, \ldots, u_T)$? Если функцию $Q(u_1, \ldots, u_T)$ предполагать непрерывно дифференцируемой, то эффект от изменения показателя u_i на единицу приближенно выражается величиной $\frac{\partial Q}{\partial u_i}$, зависящей, вообще говоря, от $u_1, \ldots, u_T$. Относительная ценность изменения на единицу i-го и j-го показателей, в свою очередь, приближенно выражается функцией

$$\eta_{ij} = \frac{\partial Q}{\partial u_i} \Big/ \frac{\partial Q}{\partial u_j} \tag{2.98}$$

(предельная норма замены i-го и j-го аргументов). Следовательно, для отражения в критерии Q информации об относительных приоритетах показателей нужно, чтобы при $u_i = u_j$ выполнялось равенство

$$\eta_{ij} = \alpha_{ij}. \tag{2.99}$$

Таким образом, коэффициенты относительной важности частных показателей $u_1, \ldots, u_T$ определяют значение предельной нормы их замены в точке $u_i/u_j = 1$.

Поскольку при $u_i = u_j$ величина η_{ij} не зависит от значений остальных показателей $u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}, u_{j+1}, \ldots, u_T$, будем считать, что и при любых других зна-

чениях u_t и u_j величина η_{tj} определяется только отношением u_t/u_j. Оказывается, что это условие почти полностью определяет вид интегрального критерия $Q(u_1, \ldots, u_T)$. Действительно, в этом случае эластичность замены t-го и j-го факторов

$$\sigma_{tj}^{M} = \left(\frac{d \ln/\eta_{jt}}{d \ln (u_t/u_j)}\right)^{-1}$$

также является функцией от отношения u_t/u_j, откуда следует (см. п. 2.2.5), что при $T \geqslant 3$ линейно-однородная функция $Q(u_1, \ldots, u_T)$ имеет вид функции с постоянной и одинаковой для всех факторов эластичностью замены *CESM*:

$$Q = (\alpha_1 u_1^{\beta} + \ldots + \alpha_T u_T^{\beta})^{1/\beta}, \qquad (2.100)$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_T, \beta$ — параметры, причем все эластичности замены равны: $\sigma_{tj}^{M} = \sigma_Q = \frac{1}{1-\beta}$*.

В дальнейшем будут строиться критерии оптимальности именно такого вида; как отмечено в [51], это один из наиболее распространенных способов свертки критериев в многокритериальных задачах. Функции (2.100) являются выпуклыми по $u_1, \ldots, u_T$ при $\sigma_Q \leqslant 0$ и включают: при $\sigma_Q = -1$ критерий наименьших квадратов (2.95), при $\sigma_Q = -\infty$ — критерий наименьших модулей (2.96) и при $\sigma_Q = 0$ — минимаксный критерий (2.97). Предельная норма замены для (2.100) имеет вид $\eta_{tj} = \frac{\alpha_t}{\alpha_j}\left(\frac{u_t}{u_j}\right)^{\beta-1}$. При $u_t/u_j = 1$ должно выполняться равенство (2.99), поэтому $\alpha_t/\alpha_j = \alpha_{tj}$, $t, j = 1, \ldots, T$. Отсюда следует, что критериальная функция Q может быть записана как

$$Q = (u_1^{\beta} + \alpha_{12} u_2^{\beta} + \alpha_{1T} u_T^{\beta})^{1/\beta},$$

где α_{1j} — коэффициент относительной важности u_j по сравнению с u_1.

В общей постановке задачи многокритериальной оптимизации коэффициенты относительной важности критериев определяются на основе экспертных данных [54]. В случае, когда в качестве u_i выступают отклонения фактических значений от вычисленных, сравнение их по существу сводится к выделению тех точек $x(t)$, $t = 1, \ldots, T$, в которых близость $f(x(t))$ и $\tau(x(t))$ наиболее предпочтительна. Ос-

* При постоянном β минимизация (2.100) эквивалентна минимизации критерия $Q = \alpha_1 u_1^{\beta} + \ldots + \alpha_T u_T^{\beta}$, однако при переменных β (этот случай также рассматривается ниже), классы указанных критериев не совпадают.

нованием для такого выбора служит информация о целях моделирования (прогноз, анализ или планирование), а также о том, насколько характерным (информативным) является функционирование системы в t-й период для ее деятельности в целом.

Теперь для завершения построения критерия оптимальности оценки параметров производственной функции в виде (2.100) осталось определить коэффициент β (или, что то же самое, параметр эластичности замены факторов критерия $\sigma_Q = 1/(1-\beta)$).

Отметим, сначала, что если среди класса пробных функций $F = \{f_a\}$ существует единственная функция $\widehat{f_a}(x) = f_{\widehat{a}}(x)$, для которой значения в точках $x(1), \ldots, x(T)$ равны фактическим наблюдавшимся значениям выпуска,

$$f_{\widehat{a}}(x(t)) = y(t), \quad t = 1, \ldots, T, \tag{2.101}$$

то в качестве коэффициента β может быть взято практически любое отличное от нуля число: при применении достаточно совершенного вычислительного метода вектор параметров $\widehat{a}$, минимизирующий критерий Q, одновременно минимизирует и все критерии $\varkappa^0_{11}, \ldots, \varkappa^0_{1t}$. Однако такая ситуация является уникальной. Обычно результат решения задачи (2.100) не совпадает с результатом решения задачи (2.101) и существенно зависит от уровня эластичности замены факторов критерия Q.

Для выяснения характера этой зависимости заметим, во-первых, что минимизируемый критерий Q должен быть выпуклой функцией от аргументов $u_1, \ldots, u_T$, следовательно, $\sigma_Q \leqslant 0$. Далее, если данный критерий предназначен для построения производственной функции, у которой эластичности замены между некоторыми факторами зависят от оцениваемых параметров, то при любом фиксированном σ_Q следует ожидать, что оценка уровней этих эластичностей $\sigma^{\mathrm{A}}_{ij}(f)$ будет завышена. Причина этого состоит в следующем.

Обычно наблюдавшиеся значения $y(t)$ не «ложатся» ни на одну из поверхностей $f_a(x) \in F$, а образуют рассеянное «облако» вокруг поверхностей. Эластичность замены i-го и j-го факторов в данной точке x характеризует локальную кривизну производственной поверхности в окрестности данной точки. Если агрегированная технология имеет в ряде точек низкую эластичность замены между данными факторами и соответственно высокую степень кривизны поверхности, то при значительном разбросе значений $y(t)$ эта кривизна аппроксимирующей функцией, как правило, не улавливается. Чем выше разброс наблюдавшихся значе-

ний выпуска $y(t)$, чем дальше друг от друга отстоят значения ресурсов $x(t)$ при различных t, тем выше будет оценка эластичности замены факторов. Следует учесть также, что эластичности замены факторов являются характеристиками второго порядка, а возможности включения в информационную базу построения ПФ информации о характеристиках второго порядка весьма ограничены. Обычно по рассеянным данным улавливается лишь общая, упрощенная картина поведения функции, а это, в свою очередь, ведет к приоритетности более «плоских» производственных поверхностей. Смещение вверх оценки эластичности замены факторов, полученной при построении функции *CESM* по методу наименьших квадратов, отмечалось, в частности, в [45].

Влияние изменения величины σ_Q на результат оценки параметров, порой значительное [46], имеет следующую общую направленность: чем больше абсолютная величина эластичности замены факторов критерия σ_Q, тем, как правило, выше оценки параметров, определяющих эластичности замены факторов производственной функции. Это связано с тем, что меньшему значению $|\sigma_Q|$ отвечает более «строгий» критерий оценки качества параметров Q. В пределе при $|\sigma_Q| \to 0$ и $\sigma_Q \leqslant 0$ критериальная функция имеет вид $Q = \max(u_1, \ldots, u_T)$. При этом критерии производственная поверхность в большинстве случаев будет равномерно «прижиматься» ко всем наблюдавшимся значениям $y(1), \ldots, y(T)$. Если же, напротив, $|\sigma_Q| = \infty$, то критерий Q имеет вид линейной функции $Q = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_T u_T$. Его минимизация возможна за счет уменьшения любого из отклонений $u_1, \ldots, u_T$. Поэтому при этом критерии обычно разброс отклонений $u_1, \ldots, u_T$ для итоговой функции $\widehat{f}$ значителен.

Естественно, что в первом случае геометрические характеристики производственной поверхности $\widehat{f}$, полученной в результате оценки параметров, будут более точно отражать характеристики «истинной» производственной функции, чем во втором. Следовательно, при оценке параметров с помощью более «строгого» критерия уровни эластичности замены факторов производственной функции f, отражающие, в частности, характеристики кривизны производственной поверхности $\widehat{f}$, в большинстве случаев будут ниже, чем при оценке параметров по более «мягкому» критерию. Таким образом, σ_f следует считать неубывающей функцией от $|\sigma_Q|$. Условно предполагая зависимость эластичности замены i-го и j-го факторов производственной функции в

точке $x(t)$ от эластичности замены факторов критерия σ_Q дифференцируемой, можно записать, что

$$\frac{\partial \sigma_{ijf}(x(t))}{\partial |\sigma_Q|} \geqslant 0, \quad t = 1, \ldots, T. \qquad (2.102)$$

Теперь вернемся к вопросу о выборе величины σ_Q. Выше отмечалось, что в идеальной ситуации, когда для некоторой функции $\widehat{f_a} \in F$ имеют место равенства $y(t) = \widehat{f_a}(x(t))$ при $t = 1, \ldots, T$, величина $\sigma_{\widehat{f_a}}$ почти не зависит от выбора σ_Q и $\frac{\partial \sigma_{ijf}(x(t))}{\partial |\sigma_Q|}$ близко к нулю. С другой стороны, при фиксированном σ_Q, как мы видели, оценка σ_{ijf} имеет тенденцию к завышению. Единственным выходом из такого положения было бы использование критерия Q с переменной эластичностью замены факторов σ_Q.

Оценка параметров производственных функций ведется, за исключением линейных моделей, итеративными методами. Каждый шаг итерации включает анализ текущего вектора параметров, определение одного или нескольких возможных вариантов нового вектора и сравнение их с текущим. При использовании критерия с фиксированными параметрами α, σ_Q «качество» любого вектора параметров определяется с помощью одной и той же меры, что и приводит к завышению итоговых оценок эластичности замены факторов производственной функции. Если отказаться от постоянства эластичности замены факторов критерия σ_Q и наделить критерий способностью адаптации к текущей ситуации, можно избежать необоснованного смещения вверх оценки $\widehat{\sigma_{ij}}$. Для этого величину σ_Q следует связать такой функциональной зависимостью с текущими значениями параметров, определяющих эластичности $\sigma_{ijf}(x(t))$, $t = 1, \ldots, T$, чтобы к оценке качества вектора параметров функции с большими эластичностями применялся более «строгий» критерий, к оценке качества вектора параметров функции с меньшими эластичностями — более «мягкий».

Приведенный адаптивный подход к формированию критерия оценки параметров допускает следующую системную интерпретацию. Предположим, что каждая пробная функция f_a из класса F представляет один из возможных вариантов функционирования некоторой производственной системы S, осуществляющей преобразование производственных ресурсов $x_1, \ldots, x_n$ в продукцию, объем выпуска которой равен $y = f_a(x_1, \ldots, x_n)$. Вектор параметров $a = (a_1, \ldots, a_n)$ определяет технологию этой переработки.

Выбор технологии осуществляется внутри самой системы S из стремления к сближению показателей ее работы и утверждаемых показателей плана. Плановые показатели представлены объемами выпуска продукции $y(t)$ при заданных объемах ресурсов $x(t) = (x_1, (t), \ldots, x_n(t))$, $t = 1, \ldots, T$.

Фактически показатели работы системы при использовании технологии a представлены значениями $f_a(x(t))$, $t = 1, \ldots, T$. Качество работы системы S характеризуется отклонением плановых от фактических значений объема выпуска, причем план является «жестким» в том смысле, что равно нежелательными будут отклонения как в сторону уменьшения, так и увеличения значений показателей выпуска по сравнению с плановыми.

Процесс оценки параметров интерпретируется в этой ситуации как поиск технологии, позволяющей системе S наилучшим образом выполнить задания плана. При этом количественные характеристики расхождения даются выражениями

$$u_t = |f_a(x(t) - y(t))|, \quad t = 1, \ldots, T.$$

Обобщенную (интегральную) оценку данного состояния системы S представляют значения функции $q = Q(u_1, \ldots, u_T)$. Эта функция рассматривается как адекватная производственная для некоторой системы C, входами которой служат значения отклонений $u_1, \ldots, u_T$, а выходом — интегральная оценка деятельности системы S в виде $q = Q(u_1, \ldots, u_T)$. Система C, таким образом, реализует функции контроля за деятельностью системы S и может рассматриваться как часть системы управления ею.

Взаимоотношения систем S и C с окружающей средой в определенном смысле противоположны. Если производственная система S стремится к расширению, выпуску большего количества продукции и максимизации выходных показателей, то задачей системы контроля C является минимизация отклонений результатов деятельности S от плана. Поэтому производственная функция f_a системы S является супераддитивной :

$$f_a(x + x') \geqslant f_a(x) + f_a(x'), \qquad (2.103)$$

а производственная функция Q системы C — субаддитивной:

$$Q(u + u') \leqslant Q(u) + Q(u').$$

Производственная система S выбирает технологию функционирования исходя, во-первых, из необходимости выполнения плана на данный период и, во-вторых, из обеспечения устойчивости своего собственного развития. Поэто-

му при близких прочих условиях выбираться будет та технология, которая предоставляет большую свободу в маневрировании ресурсами и облегчает выполнение плана за пределами данного планового горизонта. Величина прямой эластичности замены $\sigma_{ij}^{пр}$ характеризует степень влияния соотношения между i-м и j-м факторами на соотношение их эффективностей. При большой величине $\sigma_{ij}^{пр}$ это влияние незначительно, что облегчает компенсацию ресурсов в условиях дефицита или несвоевременной поставки одного из них. Следовательно, в условиях относительной свободы выбора есть основания полагать, что предпочтительнее окажется высокоэластичная технология.

Однако чрезмерный рост взаимозаменяемости основных факторов производства может привести к снижению эффективности их использования. Если речь идет о масштабной народнохозяйственной системе, такой, как крупная отрасль, союзная республика, и т. п., в которой имеются значительные материальные, финансовые и трудовые ресурсы, одновременно функционируют различные технологии и существует возможность их сравнительно быстрой замены, то для такой системы естественной является высокая эластичность. Если же масштаб системы относительно невелик, то обеспечение возможности технологического маневра приводит, как правило, к завышению производственных запасов и омертвлению части производственных ресурсов. Поэтому при определении вектора параметров должен учитываться уровень эластичности замены факторов: высокоэластичные технологии должны оцениваться по более жесткому критерию, низкоэластичные — по более мягкому. Такой подход, препятствуя как завышению, так и занижению технологии, реализует один из вариантов обратной связи, осуществляемой с помощью системы контроля C. Системы S и C можно представлять связанными отношением взаимности.

Эластичность замены факторов критерия оценки параметров может также непосредственно испытывать влияние цели построения производственной функции. Если функция предназначена для прогнозирования [19], то в качестве критерия рекомендуется выбирать высокоэластичную функцию (например, сумму модулей отклонений); для краткосрочного прогноза — низкоэластичную функцию (сумму квадратов отклонений, максимальный модуль отклонений).

Изложенные в данном пункте принципы формирования критерия оценки параметров, как в вычислительной, так и в системной интерпретации, мы используем далее для определения конкретного вида критериев оценки параметров функции *CESM*.

2.4.2. Критерии оценки параметров производственных функций с постоянной эластичностью замены факторов

В данном пункте под производственной функцией понимается линейно-однородная функция, имеющая постоянную эластичность замены факторов по Михалевскому. Согласно п. 2.2.5, такие функции имеют вид

$$y = (a_1 x_1^b + \ldots + a_n x_n^b)^{1/b} \qquad (2.104)$$

(здесь $\sigma = 1/(1-b) \neq 1$)
или

$$y = a_0 x_1^{a_1} \ldots x_n^{a_n} \qquad (2.105)$$

(здесь $\sigma = 1$).

К этому же классу естественно отнести и функцию Леонтьева

$$y = \min(a_1 x_1, \ldots, a_n x_n) \qquad (2.106)$$

(здесь $\sigma = 0$)

Эластичности взаимной замены любых двух факторов по любому из приведенных в п. 1.3.6 определений для таких функций одинаковы, постоянны и равны: $\sigma_{ij} = \sigma$, причем для функции *CESM* общего вида (2.104) эластичность замены факторов является оцениваемым параметром, а для функции Кобба — Дугласа (2.105) и Леонтьева (2.106) она фиксирована на уровне $\sigma = 1$ и $\sigma = 0$ соответственно.

Таким образом, в данной ситуации и производственная функция, и критерий оценки ее параметров относятся к одному и тому же классу функций *CESM*. Возникает, образно говоря, своеобразный замкнутый «мир функций *CESM*». В системной интерпретации процесса оценивания параметров, данной в предыдущем пункте, это означает, что производственная система *S* и контролирующая система *C* адекватно описываются функциями *CESM*.

При оценивании параметров функции вида (2.104) принцип дифференцированного подхода к оценке качества различных векторов параметров производственной функции реализуется с помощью функциональной обратной связи между эластичностью замены факторов критерия оценки σ_Q и эластичностью замены факторов функции σ_f. Поскольку итоговая оценка эластичности замены факторов $\sigma_{\hat{f}}$ может рассматриваться как неубывающая функция от $|\sigma_Q|$, то обратная связь, препятствующая как завышению, так и занижению оценки $\sigma_{\hat{f}}$, должна определять $|\sigma_Q|$ как убываю-

щую функцию от текущего значения σ_f. Такому условию отвечает, в частности, функция

$$|\sigma_Q| = 1/\sigma_f. \qquad (2.107)$$

Обоснование именно такой зависимости будет приведено ниже. Сейчас же заметим, что при использовании формулы (2.107) к вектору параметров $a_1, \ldots, a_n, \beta$, где величина $\sigma_f = 1/(1-\beta)$ относительно велика, будет применяться более «строгий» критерий качества, чем к такому же вектору с малым значением $\sigma_f = 1/(1-\beta)$*. При этом «равновесие» между эластичностью замены факторов производственной функции и критерия оценки будет иметь место при $\sigma_f = 1$, $|\sigma_Q| = 1$, т. е. когда производственная функция имеет вид Кобба — Дугласа, а критерием является сумма квадратов.

В некотором смысле это соответствует распространенной точке зрения, что функция Кобба — Дугласа в наибольшей степени отвечает системам среднего народнохозяйственного уровня (отрасль, крупная подотрасль и т. п.), а критерий мнк является наиболее обоснованным.

Поскольку $\sigma_f \geqslant 0$, $\sigma_Q \leqslant 0$, получаем, что $\sigma_Q = -1/\sigma_f$. Таким образом, в качестве критерия оценки параметров функции *CESM* вида (2.104) должен использоваться критерий

$$Q = (\alpha_1 u_1^\beta + \ldots + \alpha_T u_T^\beta)^{1/\beta}, \qquad (2.108)$$

где значение $\alpha_1, \ldots, \alpha_T$ с точностью до мультипликативной константы определяется сведениями об относительной информативности данных в различные моменты времени, а параметр β следующим образом выражается через текущее значение параметра σ_f (или параметра b):

$$\beta = 1 + \sigma_f = 1 + \frac{1}{1-b} = \frac{2-b}{1-b}. \qquad (2.109)$$

Вычисление параметров $a_1, \ldots, a_n, b$ в производственной функции (2.104) сводится теперь к задаче нелинейного математического программирования относительно неизвестных $a_1, \ldots, a_n, b$:

---

* Для полноты анализа работы адаптивного критерия оценки параметров следует принять во внимание, что, хотя с ростом $|\sigma_Q|$ критерий Q становится более «мягким», при фиксированных $u_1, \ldots, u_T$ функция вида (2.100) возрастает с ростом $|\sigma_Q|$. Однако можно показать, что этот эффект оказывается незначительным по сравнению с эффектом от «смягчения» критерия.

$$\left(\alpha_1 u_1^{\frac{2-b}{1-b}} + \alpha_2 u_2^{\frac{2-b}{1-b}} + \ldots + \alpha_T u_T^{\frac{2-b}{1-b}}\right)^{\frac{1-b}{2-b}} \to \min;$$

$$u_t - \left| y(t) - \left(a_1 x_1(t)^b + \ldots + a_n x_n(t)^b\right)^{\frac{1}{b}} \right| = 0, \qquad (2.110)$$

$$t = 1, \ldots, T.$$

Усложнение предлагаемого критерия Q по сравнению, скажем, с мнк не должно вносить существенных дополнительных вычислительных трудностей в задачу оценки параметров нелинейных производственных функций. Критерии наименьших квадратов и наименьших модулей в общем случае не требуют решения общей задачи нелинейного программирования лишь при оценке параметров линейной функции (мнк сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений, мнм — к задаче линейного программирования). Во всех остальных случаях, т. е. когда производственная функция не является линейной по параметрам и не приводится к такому виду с помощью известных преобразований, задачи оценки параметров по критерию переменной эластичности (2.110) и по критериям (2.95), (2.96) или (2.97) равносильны по трудности.

Для построения производственной функции класса *CESM*, у которой эластичность замены не является оцениваемым параметром, принятый подход приводит к следующим выводам:

1. Если $\sigma_f = \infty$, то $\sigma_Q = 0$, поэтому для оценки параметров линейной производственной функции следует использовать критерий минимакса

$$Q = \max_{1 \leqslant t \leqslant T} |y(t) - f(x(t))| \to \min.$$

2. Если $\sigma_f = 0$, то $\sigma_Q = -\infty$, поэтому для оценки параметров производственной функции Леонтьева используется критерий наименьших модулей

$$Q = \sum_{t=1}^{T} \alpha_t |y(t) - f(x(t))| \to \min.$$

3. Если $\sigma_f = 1$, то $\sigma_Q = -1$, следовательно, для оценки параметров производственной функции Кобба — Дугласа нужно использовать критерий наименьших квадратов

$$Q = \sum_{t=1}^{T} \alpha_t (y(t) - f(x(t)))^2 \to \min.$$

4. Если σ_f априорно фиксируется на определенном уровне, то параметр β критерия оценки Q также фиксируется на

уровне $\beta = 1 + \sigma_Q$. Мы приходим здесь к так называемым L_ν-оценкам Хубера, рассмотренным для линейной регрессии в [23].

В заключение вернемся к системной интерпретации процесса оценки параметров и сформулируем системные предпосылки, однозначно определяющие для линейно-однородных производственных функций зависимость между σ_Q и σ_f в виде (2.107).

Адаптивный характер связи между производственной и оценивающей системами реализует отображение ε, которое каждой линейно-однородной производственной функции f_a ставит в соответствие оценочную функцию Q. Так как параметры $\alpha_1, \ldots, \alpha_T$ функции Q не зависят от того, какая функция оценивается, то фактически Q определяется эластичностью замены факторов σ_Q. Если же учесть, что σ_Q зависит только от уровня эластичности замены факторов функции f (и не зависит от ее остальных параметров $a_1, \ldots, a_n$), то получим, что ε определяет отображение ε_0: $\sigma_f \to \sigma_Q$, переводящее каждую точку луча $(0, \infty)$ в точку луча $(-\infty, 0)$.

Поскольку контролирующая система C также рассматривается как особый вид производственной системы и описывается с помощью «производственной» функции с постоянной эластичностью замены факторов Q, то можно представить себе еще один уровень контроля — систему D, задачей которой является оценка деятельности самой системы C. В «мире *CESM*» деятельность этой системы также описывалась бы с помощью одной из функций с постоянной эластичностью замены. Отображение $\varepsilon_0 : \sigma_f \to \sigma_Q$ можно, следовательно, расширить на отрицательную часть числовой прямой. В экономической практике принят, однако, иной способ оценки деятельности системы контроля: не путем создания новых систем, а путем исследования работы самой управляемой системы. Эластичность замены факторов функции, описывающей работу системы «вторичного контроля» D должна быть, следовательно, такой же, как и у исходной системы S. Отсюда вытекает, что двойное применение отображения ε_0 должно приводить к исходной точке: $\varepsilon_0(\varepsilon_0(\sigma)) = \sigma$ для любого $\sigma \geqslant 0$. Кроме того, взаимно адаптивный характер связи между системами S и C определяет ε как нечетную функцию: $\varepsilon(-\sigma) = -\varepsilon(\sigma)$.

С каждой линейно-однородной производственной функцией $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ можно однозначно связать функцию минимальных удельных затрат $z = g(c_1, \ldots, c_n)$, которая задается правилом

$$g(c_1, \ldots, c_n) = \frac{1}{y} \inf_{(x \mid f(x)=y)} (c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n). \quad (2.111)$$

Если аргументы $x_1, \ldots, x_n$ функции f делятся на три группы, характеризующие средства труда, предметы труда и труд, то аргументы $x_1, \ldots, x_n$ функции g соответственно определяют амортизационные отчисления, отношения между материальными затратами различных видов и оборотными средствами, а также размеры средней заработной платы по группам работающих таким образом, чтобы сумма $c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$ выражала себестоимость продукции, произведенной с помощью ресурсов $x_1, \ldots, x_n$.

Величина $g(c_1, \ldots, c_n)$ будет равна тогда минимальным затратам на 1 руб. объема выпуска продукции в размере y.

Отображение, переводящее функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ в функцию $g(c_1, \ldots, c_n)$, обозначим через δ.

В п. 3.1.2 доказывается, что для производственных функций $f(x)$ вида *CESM* функция минимальных удельных затрат $g(c)$ также относится к классу *CESM*, причем если эластичность замены факторов $x_1, \ldots, x_n$ функции $f(x)$ равна $\sigma > 0$, то эластичность замены факторов $c_1, \ldots, c_n$ функции $g(c)$ равна $1/\sigma$. Повторное применение оператора δ к функции g, как показано в п. 3.1.2, приводит вновь к функции f, так что связь между f и g относится к числу двойственных.

Для критериальной функции $Q(u_1, \ldots, u_T)$, которую мы интерпретируем как производственную функцию оценивающей системы C, также вводится понятие, аналогичное функции минимальных удельных затрат. Пусть

$$R(v_1, \ldots, v_T) = \frac{1}{q} \sup_{(u \mid Q(u)=q)} (v_1 u_1 + \ldots + v_T u_T). \quad (2.112)$$

Если считать, что аргументы $v_1, \ldots, v_T$ этой функции выражают «штрафы» за единичное отклонение значения функции $f(x(t))$ от плана $y(t)$ в момент t, то величина $v_1u_1 + \ldots + v_Tu_T$ будет выражать общую «штрафную» оценку работы данной функции $f(x)$. Значение функции R в точке $v_1, \ldots, v_T$ покажет тогда максимально ожидаемую «штрафную» квоту единицы общей оценки $q = Q(u)$. Иными словами, $R(v)$ представляет собой штрафную функцию, которая определяет максимальную плату за каждую единицу уровня оценочной функции Q в зависимости от структуры распределения штрафов по периодам отклонений от плана.

Если $Q(u)$ — функция с постоянной эластичностью замены факторов вида (2.100), то к этому же классу функ-

ций будет принадлежать и функция $R(v)$, причем $\sigma_R = 1/\sigma_Q$. Отображение, сопоставляющее функции Q сопряженную с ней функцию R, также обозначим через δ. Можно доказать, что, применив δ к функции Q повторно, мы вновь придем к исходной функции Q, т. е. $\delta(\delta(Q)) = Q$.

Поскольку система S допускает двоякое описание (с помощью производственной функции $f(x)$ и с помощью функции удельных затрат $g(c)$), отклонение ее функционирования от плана также может оцениваться двояко — путем оценки отклонений $u_t = |f(x(t)) - y(t)|$ и путем оценки отклонений $v_t = |g(c(t)) - z(t)|$ (здесь $c(t)$, $z(t)$ — плановые задания по структуре себестоимости и затратам на 1 руб. выпуска продукции). Если план по ресурсам и выпуску $x(t)$, $y(t)$ надлежащим образом согласован с планом по себестоимости и удельным затратам $c(t)$, $z(t)$, $t = 1, \ldots, T$, то оба способа контроля равносильны.

Поскольку вогнутые функции от n аргументов f и g с помощью разных наборов показателей равно адекватно описывают работу одной и той же производственной системы S, а выпуклые функции от T аргументов Q и R служат альтернативными моделями оценочной системы C, то логично считать, что функция R также является оценочной функцией для функции g, т. е. $R = \varepsilon(g)$. Тогда связь между функциями f, g, Q, R выражается следующей диаграммой:

$$\begin{tikzcd} f \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & g \arrow[d, "\varepsilon"] \\ Q \arrow[r, "\delta"'] & R \end{tikzcd}$$

Соответственно, если рассматривать ε как отображение на множестве значений эластичности замены σ_f, получается диаграмма

$$\begin{tikzcd} \sigma_f \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_0"'] & 1/\sigma_f \arrow[d, "\varepsilon_0"] \\ \sigma_Q \arrow[r] & 1/\sigma_Q \end{tikzcd}$$

и равенство $\varepsilon_0(1/\sigma) = 1/\varepsilon_0(\sigma)$.

Оказывается, что перечисленные условия однозначно определяют функцию ε_0 в виде $\varepsilon_0(\sigma) = -1/\sigma$. Именно, если ε — возрастающая на лучах $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$ функция, удовлетворяющая для любого $\sigma \neq 0$ условиям:

$$\varepsilon_0(\varepsilon_0(\sigma)) = \sigma; \tag{2.113}$$

$$\varepsilon_0(1/\sigma) = 1/\varepsilon_0(\sigma); \tag{2.114}$$

$$\varepsilon_0(-\sigma) = \varepsilon_0(\sigma), \tag{2.115}$$

то $\varepsilon_0(\sigma) = -1/\sigma$ [34]. (2.116)

Изложенный подход к построению критерия оценки параметров не является единственно возможным (другие соображения по этому поводу можно найти в [23, 46]). Вместе с тем идея зависимости меры от ситуации, в которой производится измерение, широко используемая в физике, а также гипотеза о сопряженности и зависимости всех функций, так или иначе связанных с ПФ (см. также гл. 3), открывают, как нам представляется, дополнительные возможности повышения адекватности и комплексности экономико-статистического моделирования хозяйственных систем.

2.4.3. Критерии оценки параметров, основанные на анализе изоквант

Стандартный подход к понятию близости двух функций f и τ подразумевает, что если их области определения имеют значительную общую часть, в точках которой функции принимают близкие значения, то эти функции близки. Такой подход основан на определении равенства функций через равенство их значений в каждой точке общей части их областей определения. Понятие близости в пространстве функций здесь индуцируется понятием близости в пространстве значений. Если целью построения производственной функции является определение значения выпуска при заданных значениях ресурсов, то о близости построенной производственной функции к технологии следует судить, как обычно и делается, по близости значений функции f в наблюдавшихся точках к значениям функции τ. Однако часто производственная функция строится для решения обратных задач: определить приближенно точки в пространстве ресурсов, в которых обеспечивается данный объем выпуска, или определить точки в пространстве ресурсов, которые соответствуют изменению режимов производства, максимуму объема выпуска и т. д. В этих случаях, очевидно, следует считать критерием качества аппроксимации не то, насколько близки значения функций f и τ в заданных точках, а то, насколько близки точки в пространстве ресурсов, в которых f и τ принимают равные значения. Здесь уже понятие близости на множество функций переносится с пространства аргументов. Для краткости обычный подход будем называть *идентификацией по значениям*, второй — *идентификацией по изоквантам*.

Какой вид имеет в случае идентификации по изоквантам отношение ρ_τ? Зафиксируем число $y > 0$ и обозначим через $U_f(y)$ множество тех точек x из области определения функции f, для которых $f(x) = y$. Таким образом, $U_f(y)$

обозначает изокванту функции f, соответствующую значению y. В качестве расстояния $r(x, x')$ между точками x, $x' \in R^n$ будем рассматривать евклидову норму их разности, т. е.

$$r(x, x') = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i')^2 \right)^{1/2}.$$

Расстоянием $r(x, U_f(y))$ от точки x до изокванты $U_f(y)$ считается нижняя грань всех расстояний от точки x до точек $x' \in U_f(y)$. Следовательно,

$$r(x, U_f(y)) = \inf_{\{x' \mid f(x') = y\}} \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i')^2 \right)^{1/2}.$$

Теперь критерием качества аппроксимации при идентификации производственной функции по изоквантам будет сумма квадратов расстояний от наблюдавшихся точек $x(t)$ до соответствующих изоквант $U_f(y(t))$:

$$Q = \sum_{t=1}^{T} \inf_{\{x \mid f(x) = y(t)\}} \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i(t) - x_i) \right)^2. \qquad (2.117)$$

Если $n = 1$, а функция $f(x_1)$ имеет обратную функцию $x_1 = f^{-1}(y)$, то изокванта $U_f(y)$ состоит из одной точки $x_1 = f^{-1}(y)$, а критерий оценки параметров «по изоквантам» имеет вид

$$Q = \sum_{t=1}^{T} (x_1(t) - f^{-1}(y(t))^2.$$

Это обычный критерий наименьших квадратов, записанный для обратной к f функции. Следовательно, при $n = 1$ идентификация по изоквантам для функции f равносильна идентификации по значениям для обратной функции f^{-1}.

Если в распоряжении исследователя имеются достаточно надежные программные средства решения задач математического программирования с ограничениями типа равенств, то практические расчеты по оценке параметров по изоквантам можно вести, непосредственно минимизируя критерий (2.117). При этом на каждой итерации вычисления значения Q при данном векторе параметров придется решать T задач оптимизации с ограничениями вида $f(x) = y(t)$, что требует обычно больших затрат машинного времени.

Для отдельных классов функций f можно предложить более простые методы вычисления оценок параметров «по изоквантам». Предположим, в частности, что $f(x)$ — линей-

ная однородная функция, $f(x) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$. Тогда изокванта

$$U_f(y) = \{x | a_1x_1 + \ldots + a_nx_n - y = 0\}$$

представляет собой плоскость в пространстве R^n. Расстояние $r(x, (t), U_f(y))$ от точки $x(t)$ до этой плоскости, как можно показать, равно:

$$r(x(t), U_f(y)) = \left(\frac{a_1 x_1(t) + \ldots + a_n x_n(t) - y}{a_1^2 + \ldots + a_n^2}\right)^{1/2}.$$

Теперь критерий оценки параметров линейной функции «по изоквантам» имеет вид

$$Q = \frac{1}{a_1^2 + \ldots + a_n^2} \sum_{t=1}^{T} (y(t) - a_1 x_1(t) - \ldots - a_n x_n(t))^2. \quad (2.118)$$

Следовательно, идентификация по изоквантам линейной однородной функции сводится к минимизации суммы квадратов отклонений, вычисленных от наблюдавшихся значений, деленной на квадрат евклидовой нормы вектора параметров.

Для определения минимума функций (2.118) предлагается следующий метод. Запишем функцию Q в виде

$$Q = \sum_{t=1}^{T} (\alpha_0 y(t) + \alpha_1 x_1(t) + \ldots + \alpha_n x_n(t))^2, \quad (2.119)$$

где $\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}}$, $\alpha_1 = -\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}}$, ..., $\alpha_n = -\frac{a_n}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}}$.

Найдя значения параметров $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$, минимизирующие (2.119) при условии $\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2 = 1$, мы тем самым решим и задачу минимизации (2.118). Действительно, если $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ доставляют минимум функции (2.119), причем $\alpha_0 \neq 0$* и $\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2 = 1$, то при $a_1 = -\alpha_1/\alpha_0$, $a_2 = -\alpha_2/\alpha_0$, ..., $a_n = -\alpha_n/\alpha_0$ будет достигаться и минимум (2.118).

Для отыскания минимума (2.119) воспользуемся методом множителей Лагранжа. Поскольку функция Лагранжа задачи равна

* Можно ожидать, что если ряды наблюдений $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ $(t = 1, \ldots, T)$ линейно независимы (неколлинеарны), то $\alpha_0 \neq 0$. Если бы минимум (2.119) достигался при $\alpha_0 = 0$, то (2.118) стремилась бы к минимуму при безгранично возрастающих параметрах $a_1, \ldots, a_n$.

$$\sum_{t=1}^{T} (\alpha_0 y(t) + \alpha_1 x_1(t) + \ldots + \alpha_n x_n(t))^2 -$$

$$-\lambda (\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2 - 1),$$

то точка минимума должна удовлетворять условиям:

$$\alpha_0 \Sigma y(t)^2 + \alpha_1 \Sigma x_1(t) y(t) + \ldots + \alpha_n \Sigma x_n(t) y(t) = 0;$$

$$\alpha_0 \Sigma y(t) x_1(t) + \alpha_1 \Sigma x_1(t)^2 + \ldots + \alpha_n \Sigma x_n(t) x_1(t) = \lambda\alpha;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_0 \Sigma y(t) x_n(t) + \alpha_1 \Sigma x_1(t) x_n(t) + \ldots + \alpha_n \Sigma x_n(t)^2 = \lambda\alpha_n. \tag{2.120}$$

Обозначим через V $(n+1) \times (n+1)$-матрицу коэффициентов при α_i в левых частях этих равенств и через E_0 — — $(n+1) \times (n+1)$-матрицу, отличающуюся от единичной наличием нуля в первом столбце первой строки. Тогда число λ должно удовлетворять условию $\det(V - \lambda E_0) = 0$. Определитель матрицы $V - \lambda E_0$ представляет собой многочлен от λ степени n, поэтому он имеет не более n корней. Можно показать, что минимум функции (2.119) будет достигнут, если в качестве λ взять наименьший корень этого многочлена. Теперь требуемый вектор α находится путем обычного решения системы линейных уравнений (2.120). Таким образом, для линейной функции идентификация по изоквантам проводится в основном стандартными средствами, без привлечения дополнительных методов. Если же речь идет о функции, скажем, Кобба — Дугласа, то здесь (так же, как, впрочем, и в стандартном методе наименьших квадратов) придется решать задачу минимизации с помощью итерационных методов математического программирования.

Формально критерий оценки параметров линейной функции по изоквантам напоминает критерий оценки параметров такой же функции при использовании так называемой *ортогональной регрессии* (см., например, [23]). В ортогональной регрессии минимизируется, как известно, сумма квадратов расстояний от наблюдавшихся точек $(x(t), y(t))$, $t = 1, \ldots, T$, до регрессионной плоскости $y = a_1 x_1 + \ldots$ $\ldots + a_n x_n$.

Такой подход, как легко видеть, приводит к критерию качества оценки вида

$$Q^{\text{орт}} = \frac{1}{1 + a_1^2 + \ldots + a_n^2} \sum_{t=1}^{T} (y(t) - a_1 x_1(t) - \ldots$$

$$\ldots - a_n x_n(t))^2. \tag{2.121}$$

Отличие между (2.118) и (2.121) лишь в знаменателях: в (2.121) он больше на единицу. В области пространства параметров $a_1, \ldots, a_n$, где хотя бы один из них существенно превосходит 1 по абсолютной величине, значения функций (2.118) и (2.121) достаточно близки. Если минимум (2.118) или (2.121) достигается в этой области, то оценки ортогональной регрессии и регрессии по изоквантам близки друг к другу. Сближению этих оценок способствует также рост числа переменных производственной функции. Наиболее существенного расхождения этих оценок следует ожидать в тех случаях, когда число переменных невелико, а «облако» наблюдавшихся значений как бы «стелется» вдоль плоскости $y = 0$.

Идентификация по значениям и идентификация по изоквантам представляет собой два полярных подхода к оценке параметров производственной функции. Применение того или другого способа полностью диктуется целью построения функции: идентификация по значениям — для решения задач прогнозного характера, идентификация по изоквантам — для аналитических задач. Применение промежуточных вариантов (к которым в общем случае относится и ортогональная регрессия) пока не получило в теории производственных функций достаточного обоснования.

2.5. О ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МЕТОДАХ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

После формализации всей информации, используемой для построения параметрической производственной функции, и формирования единого критерия оценки параметров построение производственной функции сводится к определению вектора параметров, минимизирующего критерий. Такая же задача решается и при оценке параметров регрессионного уравнения, т. е. уравнения, выражающего зависимость математического ожидания некоторой случайной величины от детерминированных независимых переменных [23]. Поэтому вычислительные методы, используемые для оценки коэффициентов многофакторных уравнений регрессии, в принципе могли бы применяться и при построении производственных функций. Однако задача оценки параметров производственных функций обладает определенными специфическими свойствами, учет которых в целом усложняет подбор вычислительных алгоритмов.

Отметим следующие наиболее существенные особенности оценки параметров производственных функций:

а) большинство производственных функций не являются линейными относительно параметров и не сводятся к линейным путем аналитических преобразований;

б) в качестве критерия оценки параметров также используются функции достаточно сложного вида;

в) как производственная функция, так и критерий оценки параметров могут не быть дифференцируемыми.

Таким образом, задача оценки параметров производственной функции в общем случае не сводится, в отличие от линейной регрессии, оцениваемой по методу наименьших квадратов или наименьших модулей, ни к решению нормальной системы линейных уравнений, ни к задаче линейного программирования. Возникающая задача нелинейного программирования обычно не относится также к числу выпуклых и может включать недифференцируемые функции*.

С другой стороны, ряд особенностей задачи оценивания параметров производственных функций облегчает вычислительные сложности:

г) число параметров обычно не превосходит десяти;

д) количество наблюдаемых данных обычно не превосходит пятидесяти;

е) для большинства параметров можно указать априорные границы допустимых оценок;

ж) часто для использования модели в целях прогнозирования достаточна относительно грубая оценка параметров, минимизирующих критерий, в частности не обязательно достижение глобального минимума;

з) поскольку использование доверительных интервалов и стандартных статистик, как правило, ограничено, их определение не всегда обязательно.

Исходя из этих особенностей и не останавливаясь на общей проблеме нелинейного оценивания (см. например, [23]), отметим кратко достоинства и недостатки наиболее распространенных итерационных методов нелинейного программирования, используемых для оценки параметров различных производственных функций.

Множество методов решения задачи нелинейного программирования (без ограничений) можно разбить на три группы:

---

* Для нелинейных многофакторных производственных функций сложного вида статус самостоятельной задачи приобретает даже такая операция, как многократная подстановка известных значений факторов в уже построенную функцию и вычисление значений функции. Для линейных регрессий эта операция не вызывает никаких трудностей.

методы нулевого порядка, использующие только аргументы и значения минимизируемой функции;

методы первого порядка, использующие аргументы, значения минимизируемой функции и значения ее частных производных (градиент);

методы второго порядка, использующие кроме аргументов, значений функции и ее первых частных производных также вторые частные производные.

Начнем с методов второго порядка. В основе этих методов лежит квадратичная аппроксимация минимизируемой функции, т. е. критерия оценки параметров. Если в качестве критерия оценки используется сумма квадратов отклонений, то этого можно достичь, применяя аппроксимацию производственной функции с помощью линейной функции. Так строится класс методов Ньютона — Гаусса [23]. Недостатком этого метода, а также его многочисленных модификаций, в том числе метода Хартли [74], является то, что хорошая сходимость обеспечивается, как правило, лишь в достаточной близости от точки глобального оптимума. Применение этого метода в случае, когда хорошее начальное приближение неизвестно, часто приводит к неудовлетворительным результатам [56].

Метод Марквардта [76] наряду с методом Хартли был до недавнего времени одним из наиболее распространенных методов нелинейного оценивания регрессий. Он использует частичную линеаризацию как производственной функции, так и критерия оценки и позволяет сочетать метод Ньютона — Гаусса с градиентными методами. Обычной «платой» за это является слабая скорость сходимости. Кроме того, поскольку так или иначе до начала вычислений приходится фиксировать пропорции «смешивания» методов первого и второго порядка, результат расчетов зависит от выбора начального приближения, направления и шага движения. Отметим, что как метод Хартли, так и метод Марквардта ориентированы на оценку параметров по критерию наименьших квадратов и оперируют с частными производными оцениваемой функции.

Методы первого порядка (градиентные методы) используют линеаризацию критерия оценки, рассматриваемого как функция от параметров. Эти методы требуют аналитического или (в худшем случае) конечно-разностного вычисления производных получившейся функции и, как правило, хорошо сходятся вдали от точки экстремума и гораздо хуже — вблизи нее. Обычно градиентные методы требуют большого числа итераций и соответственно больших затрат машинного времени.

Таким образом, известные методы первого и второго порядка (объединяемые также термином «методы с производными»):

а) ориентированы на использование частных производных критерия и (или) производственной функции;

б) предназначены в основном для оценки параметров по критерию наименьших квадратов;

в) работают обычно тем хуже, чем выше отклонения производственной функции от линейной.

По соображениям универсальности и простоты для реализации на ЭВМ в последнее время часто используются алгоритмы оценки параметров производственных функций, основанные на методах нулевого порядка (или методах прямого поиска). Здесь различают методы покоординатного спуска, в которых поочередно осуществляется оптимизация по одной переменной при фиксации остальных, и методы одновременного движения по всем переменным.

Методы покоординатного спуска практически могут быть эффективно использованы, как правило, лишь при оценке функций с числом параметров, не большим трех; в остальных случаях сходимость чрезвычайно замедляется, а порой и вовсе не достигается. Среди методов прямого поиска с одновременным изменением координат одним из наиболее эффективных является метод многогранника [64] (в другой терминологии — метод симплексного поиска [21]).

Достоинством метода является его малая чувствительность к локальным «неглубоким» минимумам. Кроме того, вычисление значений функции в вершинах многогранника дает возможность расширить «кругозор» поиска и анализировать качество полученного результата.

Следует отметить, что ни один из перечисленных методов не является универсальным ни относительно вида функции и критерия оценки, ни относительно стадии расчетов. В этих условиях, видимо, наилучшего результата можно достичь путем организации человеко-машинных процедур оценки параметров. В этом случае исследователь, используя достаточно мощную библиотеку различных программ и методов оценки, сможет в процессе оценки подбирать наиболее эффективные методы, чередуя их и корректируя их параметры в зависимости от текущих и прогнозируемых результатов процесса.

Остановимся кратко на программных средствах построения производственных функций. Общие программы оценки параметров нелинейных регрессий включены сейчас в стандартное математическое обеспечение ЭВМ серии ЕС и СМ ЭВМ. Здесь реализованы варианты метода Хартли и гра-

диентные методы. Программа одного из вариантов метода Марквардта, написанная на Фортране, приведена в [24]. Однако эти программы не ориентированы непосредственно на работу с производственными функциями.

Пакет программ, непосредственно предназначенный для расчетов с производственными функциями, описан в [37]. Пакет прикладных программ ПРОФЭР (производственные функции в экономических расчетах) написан на языке Фортран-IV и позволяет производить оценку параметров нелинейных производственных функций по произвольному критерию, анализ результатов оценки параметров и прогнозные расчеты на основе построенных производственных функций.

Оценка параметров ведется на основе одной из модификаций метода деформируемого многогранника. Для задания вида производственной функции и критерия оценки предусмотрены две возможности: либо работа с одним из фиксированных в пакете видов функций (линейная, Кобба — Дугласа, Леонтьева, *CES*, *LES*, Солоу и др.) и видов критерия (наименьшие квадраты, наименьшие модули, максимин, наименьшие квадраты относительных отклонений и др.) в произвольной комбинации, либо вид функции и критерия дополнительно задается с помощью специально написанной подпрограммы. В первом случае функция идентифицируется номером вида, указанием на учитываемый в функции тип технологического прогресса (по классификации [80]) и указанием, является ли ее степень однородности оцениваемым или задаваемым априорно параметром.

Для анализа результатов оценки вычисляются абсолютные и относительные отклонения расчетных от наблюдаемых значений выходного показателя, среднее относительное, среднее квадратическое отклонение и коэффициент вариации. Определяются также приросты и темпы роста результирующего и факторных показателей, а для многорежимной функции — оценки границ нормальной области.

Прогнозные расчеты на основе построенных функций ведутся путем подстановки в функцию заданных значений факторов и сравнения результатов с фактическими и контрольными (плановыми) значениями объема выпуска. Для наглядного восприятия результатов предусмотрена печать на АЦПУ графика интерполированных фактических, контрольных и вычисленных значений выпуска.

Существует также диалоговая версия пакета, предназначенная для ЭВМ СМ-4. Пакет включен в Государственный фонд алгоритмов и программ СССР [4].

2.6. ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ТОВАРНОЙ ПРОДУКЦИИ ОБЪЕДИНЕНИЯ

Опишем этапы построения производственной функции, предназначенной для определения прогноза товарной продукции на среднесрочный период.

Этап 1. Формулировка целей построения производственной функции. Цель построения функции состоит в прогнозировании объема товарной продукции в неизменных ценах, выпускаемой одним из производственных объединений в 1987—1991 гг. К моменту проведения расчетов (1986 г.) объединение функционирует в течение 15 лет (1972—1986 гг.), удовлетворяя потребности народного хозяйства в определенной группе приборов и товаров народного потребления. (Все данные по производственному объединению условные.)

Конкретные условия применения искомой производственной функции характеризуются следующим образом. Рассматриваются два основных прогнозных варианта развития объединения. В первом варианте развитие объединения предполагается осуществить в основном путем технического перевооружения и реконструкции, без существенного расширения производственных площадей и нового строительства, в условиях лимитированного прироста численности. Динамика ресурсов объединения в этом варианте: основные производственные фонды растут ежегодно на 6%, оборотные средства возрастают на 4% в год, численность промышленно-производственного персонала — на 1,5%*.

Во втором варианте в целях значительного увеличения выпуска основной продукции ПО планируется в 1989—1990 гг. осуществить строительство нового завода. В этом случае предполагается увеличение основных производственных фондов в 1987, 1988 гг. на 6% ежегодно, в 1989 г. — на 9%, в 1990, 1991 гг. — на 8% ежегодно. Соответственно оборотные средства в 1987, 1988 гг. будут возрастать на 4% в год, в 1989—1991 гг. — на 6%. Прирост численности промышленного персонала в 1987—1988 гг. составит 1,5% в год, в 1989—1990 гг. — 3%, в 1991 г. — 2%. В обоих вариантах кардинальные технологические и номенклатурные сдвиги не предусматриваются. Предполагается, что основные элементы хозяйственного механизма, в частности система цен на продукцию ПО, а также предприятий-поставщиков не изменятся, материально-техническое обеспечение

* Исходные цифровые данные о динамике ресурсов получают экспертным путем, а также с помощью других прогнозно-плановых моделей.

производства будет достаточно стабильным. В качестве дополнительных вариантов должны быть предусмотрены расчеты объема выпуска при различных комбинациях исходных данных из двух основных вариантов. В результате выполнения первого этапа определено, что

выходным показателем производственной функции будет объем товарной продукции в неизменных ценах (y);

список аргументов производственной функции должен включать среднегодовую стоимость основных производственных фондов (x_1), размер оборотных средств (x_2), среднесписочную численность промышленно-производственного персонала (x_3);

желательная область определения $M_п$ производственной функции должна включать точки $x = (x_1, x_2, x_3)$, удовлетворяющие условиям:

$$44{,}5 \leqslant x_1 \leqslant 59{,}8 \text{ (млн. руб.)};$$
$$28{,}1 \leqslant x_2 \leqslant 34{,}7 \text{ (млн. руб.)};$$
$$6{,}1 \leqslant x_3 \leqslant 6{,}6 \text{ (тыс. чел.)}$$

(по совокупности вариантов применения модели);

поскольку производственная функция предназначена для прогнозирования объема выпуска в зависимости от размеров ресурсов, основное внимание при аппроксимации должно уделяться близости фактических и расчетных значений выходного показателя.

Этап 2. Системный анализ моделируемого объекта. Потребителями продукции объединения являются отрасли народного хозяйства, а также зарубежные страны. Спрос на выпускаемую продукцию не полностью удовлетворяется в прошлом и будет опережать производство в прогнозном периоде, поэтому вся произведенная продукция будет реализовываться. Снабжение объединения материалами и сырьем, необходимыми для производства продукции, в ретроспективном периоде является достаточно стабильным. Обеспечение социального развития коллектива объединения требует расширения масштабов производства, повышения доли продукции высшей категории качества и роста производительности труда. Увеличение выпуска должно осуществляться за счет повышения отдачи действующего оборудования и дальнейшей автоматизации производственных процессов, производительность труда должна расти.

Возможность построения модели объединения в виде автомата обусловлена относительной стабильностью укрупненной технологии, а также устойчивостью материально-технического снабжения объединения. Большинство дефицитных видов сырья и материалов в рамках действующей технологии допускает возможность временной замены на

менее дефицитные, поэтому ярко выраженных лимитирующих ресурсов среди сырья и материалов нет.

Этап 3. Экономический качественный анализ объекта. Технология производственного процесса основных видов продукции включает в себя ряд операций по подготовке компонентов изделий, работы по сборке, монтажу и наладке приборов. Особенностью технологии является широкое применение ручного труда, который постепенно автоматизируется с помощью автоматических линий и систем автоматизированного управления технологическими процессами.

Численность работников, занятых на ручных операциях и составляющих до 50% общей численности ППП, будет сокращаться. За период 1972—1986 гг. один раз осуществлялся переход на новую конструктивную базу, что было связано с изменением структуры материальных затрат, ростом стоимости приобретенного в эти годы оборудования и выпускаемой продукции. В прогнозном периоде подобное изменение не предусматривается. Производительность труда в объединении существенно зависит от его фондовооруженности, поэтому рост основных фондов в условиях ограниченного роста численности будет сопровождаться ростом производительности труда. Перераспределение видов ресурсов и продукции между отдельными хозяйственными единицами, входящими в объединение, не практикуется.

В отрасли, к которой относится данное объединение, принята целевая комплексная программа, определяющая до 1990 г. мероприятия по сокращению ручного труда, техническому развитию производства и высвобождению численности работающих. В числе этих мероприятий намечено постепенное оснащение рабочих мест средствами автоматизации ручного труда, включая полностью автоматизированные рабочие места (АРМ) проектировщиков и сборщиков. Влияние динамики численности работающих на объем выпуска в прогнозном периоде будет ограничиваться, уступая место влиянию размеров основных фондов. При этом, если до 1985 г. основным фактором роста выпуска была стоимость активной части основных фондов, то начиная с 1986 г., когда дальнейший рост активной части на действующих площадях станет невозможным, в развитии основных фондов большую роль будет играть пассивная их часть — стоимость зданий и сооружений.

По мере дальнейшего развития смежных производств основным фактором, лимитирующим приобретение сырья и материалов, становятся оборотные средства. Их влияние на динамику роста объема выпуска может усиливаться.

В результате можно сделать вывод о том, что существенное влияние на показатель объема выпуска товарной продукции в неизменных ценах оказывают уровни показателей основных производственных фондов, оборотных средств, численности промышленно-производственного персонала, что совпадает с необходимым для проведения прогнозов составом аргументов производственной функции.

Этап 4. Определение системы показателей производственной функции. В данном случае в результате экономического анализа технологии определен состав показателей-аргументов производственной функции, совпадающий с целевыми требованиями к ее использованию: среднегодовая стоимость промышленно-производственных фондов (x_1), размер нормируемых оборотных средств (x_2), среднесписочная численность промышленно-производственного персонала (x_3). Выходной показатель — объем товарной продукции в неизменных ценах, введенных с 1 января 1982 г. Численные данные об этих показателях формируются на основе бухгалтерской отчетности объединения. Определение объема выпуска товарной продукции ретроспективного периода в неизменных ценах потребовало пересчета всей номенклатуры продукции в неизменные цены 1 января 1982 г. При отсутствии утвержденных цен на изделия, снятые с производства к 1 января 1982 г., определение цен производилось на основе изделий-аналогов. В итоге были получены значения всех показателей за 1972—1986 гг.

Этап 5. Формирование информационной базы для анализа технологии и построения производственной функции. Информационная база анализа технологии и построения производственной функции включает следующие компоненты: а) статистические данные о значениях показателей x_1, x_2, x_3, y за 1972—1985 гг., контрольные значения этих показателей за 1986 г.; б) статистические данные о фондоемкости и трудоемкости продукции объединения; в) экспертные коэффициенты относительной значимости (достоверности) информации для каждого года (табл. 2.1); г) информацию о программе и тенденциях сокращения ручного труда в объединении на период 1987—1991 гг.; д) информацию об особенностях технологии, составе сырья и материалов и системе материально-технического снабжения объединения; е) информацию о цели построения производственной функции и множестве $M_ц$.

Этап 6. Анализ существования и свойств агрегированной экономической технологии. В пользу существования агрегированной экономической технологии $y = \tau(x_1, x_2, x_3)$ говорят следующие соображения. В составе основных фон-

дов, используемых в производстве данного вида приборов, в широком диапазоне допустима замена отдельных видов оборудования другими; уникальные станки, приборы, системы, лимитирующие объем выпуска в масштабе всего объединения, отсутствуют. В номенклатуре используемых предметов труда имеется несколько видов дефицитных материалов (в основном драгоценные металлы), однако они не выступают как лимитирующие, поскольку могут быть заменены (возможно, с некоторым изменением технологии) другими. Аналогичное положение имеет место с различными категориями трудовых ресурсов. В итоге в качестве аргументов агрегированной технологии могут быть приняты x_1, x_2, x_3. Технологическая структура производства изменяется со временем, однако устойчивость структуры групп потребляемых ресурсов и функциональных потребностей народного хозяйства, удовлетворяемых продукцией объединения, также подтверждает существование функции $y = \tau(x_1, x_2, x_3)$. Анализ данных табл. 2.1 показывает, что приросту каждого из ресурсов соответствует положительный прирост выпуска. В таблице нет данных о результатах изолированного изменения каждого из ресурсов, однако известно, что объединение испытывает хроническую нехватку оборотных средств и его штаты не полностью укомплектованы. Это позволяет утверждать, что функция τ будет возрастать с ростом каждого аргумента. Ограниченность производственных площадей, лимиты капитальных вложений не позволяют, однако, расширять масштабы производства более чем в 1,5 раза в прогнозном периоде, поэтому можно считать, что эффективность прироста ресурса падает по мере его дальнейшего увеличения. Наконец, в таблице отсутствуют данные, противоречащие гипотезе об однородности функции τ. Таким образом, есть основание предполагать, что τ удовлетворяет неоклассическим критериям.

Рассмотрим вопрос о возможностях замены аргументов функции τ. Начнем с возможностей замещения живого и овеществленного труда. Как установлено на этапе 1, в отрасли, к которой относится объединение, в прогнозном периоде действует программа сокращения ручного труда путем внедрения автоматизированного оборудования и систем управления. Это должно обеспечить определенную компенсацию снижения прироста численности работающих. Вместе с тем внедрение автоматизированных систем управления приведет к некоторому увеличению численности работников, занятых внедрением, эксплуатацией и развитием АСУП. Таким образом, в прогнозном периоде ожидается относительно стабильный уровень технологической заме-

Таблица 2.1

Год	Товарная продукция, млн. руб.	Основные производственные фонды, млн. руб.	Оборотные средства, млн. руб.	Численность промышленного персонала, тыс. чел.	Значимость данных, баллы
1972	38,2	15,3	11,2	3,9	1
1973	43,5	15,9	12,1	4,2	1
1974	44,5	17,1	12,8	4,4	1
1975	47,8	18,8	13,3	4,6	2
1976	52,0	19,9	14,1	4,7	2
1977	54,6	21,2	14,9	4,9	2
1978	57,8	23,6	15,7	5,1	2
1979	60,4	25,3	16,8	5,2	2
1980	66,1	27,2	18,1	5,4	2
1981	70,7	30,6	19,1	5,5	2
1982	76,7	33,5	21,5	5,7	5
1983	80,2	35,8	22,3	5,7	7
1984	84,7	37,0	24,7	5,8	8
1985	87,0	39,2	25,6	6,0	9
1986	92,2	42,0	27,0	6,0	10

няемости между живым и овеществленным трудом. Условиям установившегося режима примерно соответствует пропорциональность предельной и средней производительности факторов. В свою очередь, это означает, что эластичность замены живого и овеществленного труда можно принять равной единице (см. п. 2.2.1).

Овеществленный труд в данном случае представлен стоимостью основных фондов и оборотных средств объединения. Соотношение между ними, как видно из данных табл. 2.1, близко к постоянному, так что перелива средств из одной категории ресурсов в другую не наблюдается и говорить о технологической замещаемости этих видов ресурсов, очевидно, нет оснований. Что же касается экономической замещаемости, то априори ее нельзя считать невозможной. Изменение объемов и структуры запасов оборотных средств, сопровождающееся некоторым изменением конструкции выпускаемых приборов, может быть скомпенсировано (при сохранении объема товарной продукции) определенным изменением парка оборудования при увеличении его стоимости. Поэтому будем считать эластичность замены σ_{12} показателей x_1 и x_2 оцениваемым параметром. По предварительным прогнозам ее величина, видимо, не должна значительно отличаться от единицы.

Рассмотрим вопрос о конфигурации области определения D технологии. Область $D_{набл}$ ограничена в пространстве отношений x_i/x_1 величинами:

$$0{,}64 \leqslant x_2/x_1 \leqslant 0{,}76; \quad 0{,}14 \leqslant x_3/x_1 \leqslant 0{,}25.$$

Величина x_3/x_1, обратная фондовооруженности труда, в ретроспективном периоде падает с 0,25 до 0,14 чел./тыс. руб. Следует ожидать ее дальнейшего уменьшения (с замедляющимся темпом) и в прогнозном периоде. Соотношение между оборотными средствами и основными фондами сохраняется в пределах 0,64—0,76 тыс. руб. Значения функции τ в точках $D_{\text{набл}}$ приведены в табл. 2.1.

Этап 7. Формирование отношения ρ_τ. Отношение ρ_τ будем строить в виде $\rho_\tau = \varphi_\tau \cap \psi_\tau$, где φ_τ — отношение принадлежности к некоторому параметрическому классу функций F, ψ_τ — критериальное отношение предпорядка на классе F. Таким образом, необходимо определить вид производственной функции и ее области определения, а также критерий Q оценки их параметров.

Согласно информации о свойствах агрегированной экономической технологии τ, полученной в результате этапа 6, производственная функция должна удовлетворять неоклассическим условиям неубывания, однородности, вогнутости. Для выбора конкретного параметрического класса F обратимся к данным о возможностях взаимного замещения факторов функции τ. Как установлено на этапе 6, парная эластичность замены между x_1, x_3 и x_2, x_3 может быть принята постоянной и равной 1 в прогнозном периоде. Эластичность замены между x_1 и x_2 также будем считать постоянной и равной неизвестной константе σ_{12}, несколько меньшей единицы. Приняв определение парной эластичности замены по Аллену, получим, что

$$\sigma^{A}_{12}(x_1, x_2, x_3) \equiv \sigma_{12}; \ \sigma^{A}_{13}(x_1, x_2, x_3) \equiv 1; \ \sigma^{A}_{23}(x_1, x_2, x_3) \equiv 1.$$

Таким условиям удовлетворяют функции из параметрического класса $CESA$, а именно

$$f(x_1, x_2, x_3) = (a_1 x_1^{\beta} + a_2 x_2^{\beta})^{\gamma_1/\beta} x_3^{\gamma_2}.$$

Перейдем к области определения производственной функции. Поскольку производственная функция предназначена не для аналитических, а для прогнозных расчетов в условиях вполне определенных вариантов изменения аргументов, то основным в построении области определения является не столько вопрос о конфигурации и границах области определения, сколько вопрос о том, допустимо ли применение функции в желаемой области $M_{\text{ц}}$. В пространстве соотношений между ресурсами эта область задается условиями: $0{,}58 < x_2/x_1 < 0{,}64$; $0{,}11 < x_3/x_1 < 0{,}14$.

В условиях роста производительности труда область $M_ц$ неизбежно выходит за пределы, заданные множеством $M_{набл}$ в пространстве соотношений. Однако амплитуда разброса (динамики) значений отношений x_2/x_1, x_3/x_1 в прогнозном периоде не превышает степень разброса (динамики) значений этого отношения в ретроспективном периоде. Поэтому можно ожидать, что производственная функция, построенная на статистических данных множества $M_{набл}$, будет пригодна также для моделирования процесса на множестве $M_ц$.

Если бы функция *CESA* использовалась для аналитических расчетов, причем $\sigma_{12} \approx 1$, то область определения функции по конфигурации должна была бы иметь вид эллиптического конуса:

$$K = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3_+ \mid -x_1^2 + b_2 x_2^2 + b_3 x_3^2 \leqslant 0\},$$

эластичность которого σ_K по модулю равна единице. Коэффициенты b_2, b_3 можно определить методом построения многорежимной производственной функции.

Наконец, необходимо решить вопрос о виде критерия оценки параметров. Поскольку целью построения производственной функции является прогноз, критерии оценки параметров «по изоквантам» не применялись. При условии $\sigma_f \sim 1$ ближайшей к f функцией вида *CESM* является функция Кобба — Дугласа. Согласно принципам формирования критериев оценки параметров с учетом вида функции, изложенным в п. 2.4, в этом случае можно остановиться на критерии наименьших квадратов вида $Q = \omega_1 u_1^2 + \ldots + \omega_T u_T^2$, где $u_t = |y(t) - f(x(t))|$, $t = 1, \ldots, T$.

Коэффициенты $\omega_1, \ldots, \omega_T$, определяющие вклад отклонений $u_1, \ldots, u_T$ в общее значение критерия, полагаем равными коэффициентам относительной значимости данных, установленным на этапе 3. Теперь критерий оценки параметров производственной функции имеет вид

$$Q = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + 2u_4^2 + 2u_5^2 + 2u_6^2 + 2u_7^2 + 2u_8^2 + 2u_9^2 + \\ + 2u_{10}^2 + 5u_{11}^2 + 7u_{12}^2 + 8u_{13}^2 + 9u_{14}^2 + 10u_{15}^2.$$

Этап 8. Определение вычислительного алгоритма V. Для вычисления значений параметров a_1, a_2, β_1, γ_1, γ_2 производственной функции в данном случае использовался пакет прикладных программ ПРОФЭР [37], в котором вычислительный алгоритм V реализует одну из монотонных модификаций метода деформируемого многогранника.

Этап 9. Подготовка программного обеспечения. Поскольку для проведения расчетов был использован пакет

Таблица 2.2

Год	Товарная продукция, млн. руб.	Основные производственные фонды, млн. руб.	Оборотные средства, млн. руб.	Численность промышленного персонала, тыс. чел.
1987	96,4 / 96,4	44,5 / 44,5	28,1 / 28,1	6,1 / 6,1
1988	100,6 / 100,6	47,2 / 47,2	29,2 / 29,2	6,2 / 6,2
1989	104,9 / 107,2	50,0 / 51,4	30,3 / 30,9	6,3 / 6,4
1990	109,6 / 113,5	53,0 / 55,4	31,6 / 32,8	6,4 / 6,5
1991	114,3 / 120,1	56,2 / 59,8	32,8 / 34,7	6,5 / 6,6

программ ПРОФЭР, подготовка свелась к записи вида функции и критерия оценки ее параметров в виде подпрограммы на языке Фортран, трансляции программы и компоновке ее с основными программами пакета.

Этап 10. Расчет производственной функции и области ее определения. Для проведения расчета необходимо ввести в ЭВМ исходные статистические данные и параметры, управляющие работой алгоритма, в том числе начальное значение вектора параметров функции. В результате работы программы оценки параметров была получена функция:

$$y = (0{,}53214x_1^{-0{,}10321} + 0{,}29986x_2^{-0{,}10321})^{-\frac{0{,}81004}{0{,}10321}} x_3^{0{,}13287}.$$

Начальное значение критерия оценки, соответствующее вектору $a_1 = a_2 = \beta = \gamma_1 = \gamma_2 = 1$, равно $Q = 0{,}396 \times \times 10^7$. Конечное значение критерия, соответствующее вектору $a_1 = 0{,}53214$, $a_2 = 0{,}29986$, $\beta = -0{,}10321$, $\gamma_1 = 0{,}81004$, $\gamma_2 = 0{,}13287$, равно $Q = 0{,}275 \cdot 10^2$.

Анализ отклонений вычисленных и фактических данных показывает, что достигнута достаточно высокая степень приближения (коэффициент вариации — 1,49%). В качестве области определения для прогнозных расчетов используется множество $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in R_+^3 \mid 0{,}58 < \frac{x_2}{x_1} < 0{,}64;\ 0{,}11 < \frac{x_3}{x_1} < 0{,}14\}$. Результаты использования построенной функции приведены в табл. 2.2 (в числителе — по первому, в знаменателе — по второму варианту).

Глава 3

ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ И МОДЕЛИ ЭФФЕКТИВНОГО ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВА

3.1. ФАКТОРНЫЕ МОДЕЛИ АНАЛИЗА ЗАТРАТ НА 1 РУБ. ТОВАРНОЙ И НОРМАТИВНОЙ ЧИСТОЙ ПРОДУКЦИИ

3.1.1. Понятие и основные свойства функции удельных затрат

С каждой производственной функцией, отражающей непосредственный процесс производства на предприятии, в объединении, отрасли, можно связать целый ряд производных зависимостей, использование которых позволяет более полно исследовать функционирование системы. Тождественные преобразования производственной функции, выполненные с помощью алгебраических операций, дифференцирования или интегрирования, приводят к моделям таких показателей, как производительность труда, фондоотдача, оборачиваемость оборотных средств, их приростные (предельные) характеристики. Так, разделив обе части равенства $y = f(x_1, x_2, x_3)$ (где y — объем выпуска, x_1 — стоимость основных фондов, x_2 — размер оборотных средств, x_3 — численность промышленно-производственного персонала) на x_3, получим один из возможных вариантов факторной модели производительности труда: $\frac{y}{x_3} = \frac{1}{x_3} f(x_1, x_2, x_3)$.

Если производственная функция f является классической, то в качестве факторов динамики производительности труда выступают фондовооруженность и соотношение между оборотными средствами и основными фондами: $\frac{y}{x_3} = f\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}, 1\right)$.

Другая группа производных зависимостей возникает в результате применения операций отыскания экстремумов функций. Два наиболее важных примера таких моделей — функция минимальных затрат на 1 руб. продукции и функция максимальной прибыли — рассмотрены ниже.

Показатель объема затрат на производство продукции наряду с показателем объема выпуска служит одной из важ-

нейших характеристик функционирования промышленных систем. Сопоставление затрат и результатов производства позволяет сделать выводы о его эффективности, рентабельности, целесообразности расширения или сокращения производства. Это сопоставление в экономической практике производится обычно двумя путями — либо с помощью анализа разности $y - s$, где y — объем выпуска, s — объем затрат, либо с помощью анализа отношения s/y. Первый из показателей в обобщенном виде характеризует прибыль от промышленно-производственной деятельности, второй — затраты на 1 руб. объема выпуска. Одна из основных задач экономического анализа состоит в определении систем факторов, влияющих на уровень этих показателей (*факторных систем*), и построении модели количественной зависимости показателей от уровня факторов. Факторная модель такого характера для показателя затрат на 1 руб. выпуска называется *функцией удельных затрат*, для показателя прибыли — *функцией прибыли*.

Теорема двойственности для классических производственных функций, доказываемая в п. 3.1.2, устанавливает почти полную обратимость связей между производственной функцией и функцией минимальных затрат на единицу выпускаемой продукции. Из этой теоремы вытекает, что, хотя концепция ПФ сама по себе не опирается на какие-либо предположения об оптимальности моделируемого процесса, сопряженная с ней функция удельных затрат строится как результат оптимизации. Это позволяет рассматривать ПФ как модель, сочетающую оптимизационные и имитационные принципы моделирования.

При формировании факторных систем показателей важно не упускать из виду цель построения модели. Здесь различают две ситуации: в одном случае конечной целью исследования может быть непосредственный анализ взаимосвязей различных показателей деятельности экономической системы. Результаты этого анализа впоследствии могут быть использованы для контроля данных, прогнозирования, выявления закономерностей. Во втором случае цель состоит в определении управляемых факторов, изменение которых привело бы к улучшению значений данного показателя. Именно этот, наиболее важный для практики случай рассматривается в данном пункте.

Все показатели, относящиеся к деятельности данной производственной системы, можно расположить по иерархическим уровням в зависимости от степени регулируемости данного фактора. На высшем уровне находятся показатели, характеризующие в обобщенном виде результаты дея-

тельности системы (затраты на 1 руб. продукции, прибыль, рентабельность и т. д.). На более низком уровне располагаются показатели, характеризующие результаты определенных мероприятий по улучшению работы. Наконец, самый низкий уровень занимают показатели, описывающие не результаты, а исходные характеристики мероприятий. Такое разделение показателей связано с тем, что лишь в редких случаях руководство объединения (предприятия, отрасли и т. д.) имеет возможность провести мероприятия, обеспечивающие непосредственное увеличение фондоотдачи, производительности труда и других результативных показателей. Как правило, в пределах возможностей руководства находятся мероприятия, изменяющие количество, структуру и организацию использования тех или иных ресурсов. Например, такое мероприятие, как приобретение, монтаж и наладка автоматической линии, характеризуется в первую очередь капитальными вложениями, необходимыми для этого, и соответствующим приростом стоимости активной части основных производственных фондов. Что же касается вклада данной линии в прирост выпуска продукции, производительности труда и т. д., то эти показатели являются расчетными и их реальные значения могут существенно отличаться от предполагаемых.

В связи с этим одно из основных требований к факторной системе состоит в том, что она должна включать лишь те показатели, которые допускают непосредственный контроль и управление. Второе требование касается возможности построения функции, связывающей значения факторов с уровнем результативного показателя. Включение в факторную систему показателей, абсолютно разнородных по содержанию, областям значений и характеру изменений, обычно делает практически трудноразрешимой проблему построения достаточно адекватной функции. Наконец, третье требование заключается в полноте информационной базы для построения факторной модели, т. е. наличии достаточно представительных (и долголетних) рядов наблюдений.

Вопрос о факторных системах для показателя удельных затрат не раз обсуждался в литературе. В частности, в работе [65] предложены факторные системы, включающие до восьми различных показателей, в том числе столь разнородные, как индекс роста производственных фондов, товарная продукция и длительность производственного цикла. В некоторых случаях в факторные системы включаются показатели, находящиеся на верхних ступенях по сложности управления ими. В результате такие системы, сформированные либо экспертным путем, либо на основе чисто

статистического корреляционного анализа наблюдений, не полностью отвечают предъявляемым к ним требованиям.

Покажем, что состав факторной системы для показателя «затраты на 1 руб. выпуска продукции» тесно связан с составом аргументов производственной функции (который совпадает с составом аргументов агрегированной экономической технологии).

Пусть основные фонды объединения представлены в его производственной функции k показателями $x_1^1, \ldots, x_1^k$, отражающими структуру и размеры фондов, трудовые ресурсы — m показателями $x_3^1, \ldots, x_3^m$, характеризующими размеры отдельных квалифицированных групп, оборотные средства — показателем x_2; производственная функция записывается в виде $y = f(x_1^1, \ldots, x_1^k, x_2, x_3^1, \ldots, x_3^m)$. Пусть $c_1^1, \ldots, c_1^k$ — нормы амортизационных отчислений по каждому из k видов основных фондов, $c_3^1, \ldots, c_3^m$ — средние ставки заработной платы одного работающего в каждой из m квалификационных групп.

Оборотные средства объединения x_2 складываются из сумм, предназначенных для создания производственных запасов, покрытия стоимости незавершенного производства, готовой продукции и прочих элементов. Если n_1 — доля производственных запасов в общей сумме оборотных средств, n_2 — норма производственных запасов на данный год (в днях запаса), тогда материальные затраты в себестоимости будут равны $n_1 x_2 \frac{n_2}{360}$.

Теперь себестоимость годовой продукции может быть записана как

$$s = \sum_{i=1}^{k} c_1^i x_1^i + c_2 x_2 + \sum_{i=1}^{m} c_3^i x_3^i, \qquad (3.1)$$

где $c_2 = \frac{n_1 n_2}{360}$.

Величины $c_1^1, \ldots, c_2, \ldots, c_3^m$ носят характер нормативов, их можно считать относительно постоянными коэффициентами, а себестоимость рассматривать как линейную функцию от показателей производственных ресурсов $x_1^1, \ldots, x_2, \ldots, x_3^m$. Коэффициенты $c_1^1, \ldots, c_2, \ldots, c_3^m$ будем называть *структурными коэффициентами себестоимости*.

Затраты на 1 руб. продукции соответственно равны:

$$\zeta = \frac{\sum_{i=1}^{k} c_1^i x_1^i + c_2 x_2 + \sum_{i=1}^{m} c_3^i x_3^i}{f(x_1^1, \ldots, x_2, \ldots, x_3^m)}. \qquad (3.2)$$

Как известно, в большинстве случаев один и тот же объем товарной продукции y может быть получен различными способами. В этих условиях предпочтение должно отдаваться тому способу, при котором затраты на производство продукции меньше. В связи с этим представляет интерес определение минимального уровня затрат на 1 руб. продукции при заданном ее объеме:

$$z = \min_{\{x \mid f(x)=y\}} \frac{\sum_{i=1}^{k} c_1^i x_1^i + c_2 x_2 + \sum_{i=1}^{m} c_3^i x_3^i}{y}. \qquad (3.3)$$

В общем случае правая часть выражения (3.3) зависит от нормативов $c_1^1, \ldots, c_2, \ldots, c_3^m$ и объема выпуска y:

$$z = z(y, c_1^1, \ldots, c_2, \ldots, c_3^m). \qquad (3.4)$$

Поскольку именно минимально допустимое значение удельных затрат при данном объеме выпуска должно закладываться в планы в качестве нормативного, функцию (3.3) назовем *нормативной функцией удельных затрат.*

Если производственная функция системы $f(x)$ является однородной первой степени, то нормативная функция удельных затрат не зависит от объема выпуска и связывает между собой нормативный уровень затрат на 1 руб. продукции, нормы амортизационных отчислений, нормативы структуры и оборачиваемости оборотных средств, уровни средней заработной платы одного работника по квалификационным группам:

$$z = \min_{\{x \mid f(x)=y\}} \frac{cx}{y} = \min_{\left\{x \mid f\left(\frac{x}{y}\right)=1\right\}} \frac{cx}{y} = \min_{\{x \mid f(x)=1\}} cx = g(c)$$

(здесь $c = (c_1^1, \ldots, c_2, \ldots, c_3^m)$).

Рассмотрим некоторые свойства нормативной функции удельных затрат. Очевидно, $g(c)$ — неотрицательная функция, определенная для любого неотрицательного вектора $c = (c_1^1, \ldots, c_2, \ldots, c_3^m)$, у которого первые k коэффициентов (нормы амортизационных отчислений) не превосходят единицы. Обозначим через B множество таких векторов:

$$B = \{(c_1^1, \ldots, c_1^k, c_2, c_3^1, \ldots, c_3^m) \in R_+^{k+m+1} \mid c_1^1, \ldots, c_1^k \leqslant 1\}.$$

Это множество обладает следующим свойством: для любого вектора $c \in R_+^{k+m+1}$ существует такое число $\lambda_c > 0$, что $\frac{c}{\lambda_c} \in B$ (достаточно положить $\lambda_c = \max(c_1^i, \ldots, c_1^k)$). Пользуясь этим свойством, функцию $g(c)$ можно распространить с мно-

жества B на весь неотрицательный ортант R_+^{k+m+1}, считая, что $g(c) = \lambda_c g(c/\lambda_c)$ при $c \notin B$. Непосредственно проверяется, что функция $g(c)$ однородна, первой степени и вогнута (см. также п. 3.1.2) Следовательно, $g(c)$ удовлетворяет тем же классическим критериям, что и производственная функция.

Очевидно,

$$\frac{1}{g(c)} = \max_x \frac{f(x)}{cx} = \max_x \left(1 + \frac{f(x) - cx}{cx}\right) =$$

$$= 1 + \max_x \frac{f(x) - cx}{cx}.$$

Величина $f(x) - cx$ выражает разность между объемом выпуска и затратами, т. е. прибыль, а ее отношение к cx — рентабельность производства (к себестоимости). Следовательно, обратная к $g(c)$ величина отличается от нормативного уровня рентабельности на единицу.

Если построена производственная функция предприятия f и известны его ресурсы x, то ожидаемый объем выпуска y определяется путем непосредственного вычисления значения функции f в точке x. Используя норматив удельных затрат z, можно найти объем выпуска при данных ресурсах косвенным путем, через объем затрат. Поскольку отдача каждого рубля затрат должна согласно нормативу составить $1/z$ руб. продукции, то затраты на использование ресурсов, x, равные cx, должны обеспечить производство продукции в размере cx/z. Числитель и знаменатель этой дроби зависят от вектора c, но даже в наихудшем случае можно гарантировать выпуск в объеме

$$h(x) = \min_c \frac{cx}{z}. \tag{3.5}$$

Назовем функцию $h(x)$ *нормативной функцией выпуска*. В каком соотношении она находится с функцией $f(x)$? Оказывается, что если уровень норматива удельных затрат согласован с нормативами $c_1^1, \ldots, c_2, \ldots, c_3^m$, т. е. $z = g(c)$, где g — нормативная функция удельных затрат, а производственная функция является классической, то

$$h(x) = f(x). \tag{3.6}$$

Это означает, что в классической ситуации прямой (через производственную функцию) и косвенный (через нормативную функцию удельных затрат) способы определения объема выпуска при данных ресурсах равносильны.

Конкретное содержание эти выводы могут получить, например, в следующей ситуации. Предположим, что для про-

изводства продукции объединение нуждается в комплектующих изделиях, причем может либо организовать их собственное производство, либо заключить договор об их поставке с другого объединения. В обоих случаях предприятию производителю будут выделены дополнительные ресурсы — основные фонды, оборотные средства, а также рабочая сила в размере x. Объем произведенной с их помощью продукции в обоих случаях будет равен $f(x)$. Использование этих ресурсов для собственного производства потребует от предприятия затрат в размере себестоимости продукции, т. е. $s = cx$. Эти затраты будут произведены в процессе производства продукции и возмещены после ее реализации в составе основной продукции предприятия. В случае отказа от собственного производства эти средства могли бы быть израсходованы предприятием на приобретение продукции у предприятия-поставщика. Какое количество продукции может быть приобретено на эту сумму? Если производственная функция для предприятия-поставщика также равна $f(x)$, нормативная функция удельных затрат — $g(c)$, то величина $h(x, c) = cx/g(c)$ показывает, какое количество продукции может быть приобретено на cx руб. Так как $g(c) \leqslant \frac{cx}{f(x)}$ при любых c, x, то и $f(x) \leqslant \frac{cx}{g(c)} = h(c, x)$.

Следовательно, при условии соблюдения нормативного уровня затрат на 1 руб. продукции объем приобретенной продукции не меньше, чем объем продукции, произведенной непосредственно на предприятии. Если заранее не известен структурный вектор нормативов себестоимости c, то гарантированный объем приобретенной продукции составит: $h(x) = \min\limits_{c} \frac{cx}{g(c)}$. В этой ситуации равенство функций $f(x)$ и $h(x)$ означает, что в указанных условиях имеет место определенного рода равновесие: отказ от производства в пользу коммерческих операций не приносит, вообще говоря, дополнительного эффекта.

Равенство (3.6) составляет содержание теоремы двойственности для классических производственных функций. Из нее вытекает, в частности, что функция $f(x)$ восстанавливается по функции $g(c)$, причем переход от $g(c)$ к $f(x)$ производится по той же формуле, что и переход от $f(x)$ к $g(c)$. С информационной точки зрения это означает, что функция удельных затрат $g(c)$ содержит столько же информации о деятельности системы, сколько и ее производственная функция $f(x)$. Это обстоятельство позволяет привлекать для построения производственной функции дополнительную ин-

формацию. Так, если число наблюдений слишком мало для надежной оценки параметров, или статистическая информация о значениях функции и ее факторов недостаточно представительна, в состав исходной информации можно включить статистические данные о нормативе удельных затрат z и нормативах $c_1^1, \ldots, c_2, \ldots, c_3^m$. Параметры нормативной функции удельных затрат связаны однозначной функциональной зависимостью с параметрами производственной функции (см. п. 3.1.3), поэтому оценку параметров можно вести как на основе функции $g(c)$ с использованием нормативных статистических данных, так и на основе функции $f(x)$ с использованием фактических данных о размерах ресурсов и выпуска. Возможны также разнообразные перекрестные варианты. Использование двойственных функций позволяет также более обоснованно определять вид и границы области определения производственной функции.

3.1.2. Двойственность между производственной функцией и функцией удельных затрат

При изложении математических основ теории двойственности мы примем более абстрактные определения производственной функции, функции себестоимости и удельных затрат, чем ранее. Это объясняется стремлением получить максимально общие результаты, пригодные для использования при всех конкретных реализациях указанных экономико-математических понятий.

Определим сначала абстрактное понятие классической производственной функции. В п. 1.3.4 введено понятие классической производственной функции как неотрицательной, однородной первой степени, вогнутой функции, определенной на неотрицательном ортанте n-мерного действительного пространства. Однако в некоторых случаях возникает необходимость рассматривать производственные функции в пространствах, имеющих бесконечную размерность. Так, объем произведенной за период продукции y можно рассматривать не только как функцию от средних или суммарных размеров ресурсов за этот период, но и в зависимости от динамики показателей ресурсов за этот или более длительный отрезок времени. В этом случае аргументами производственной функции являются не отдельные числа, а функции от времени $x_i(t)$, выражающие «траектории» изменения факторов за период T:

$$y = f(\{x_1(t) | t \in T\}, \ldots, \{x_n(t) | t \in T\}).$$

Область определения такой функции f лежит в бесконечномерном пространстве, являющемся произведением n пространств функций от одной переменной.

Поскольку реальная область определения производственной функции, как правило, не охватывает все пространство, необходимо каждый раз явно указывать конфигурацию или свойства этой области. Из результатов в п. 2.3 следует, что область определения M классической производственной функции должна быть конусом, т. е. $\lambda x \in M$ для любых $x \in M$, $\lambda \geqslant 0$; $x' + x'' \in M$ для любых x', $x'' \in M$.

Таким образом, приходим к следующему общему определению: под *классической производственной функцией* будем понимать произвольную конечную, неотрицательную, однородную, первой степени и вогнутую функцию f, определенную на непустом конусе K произвольного линейного пространства L.

Каждый конус K в линейном пространстве L задает следующее бинарное отношение на L: считается, что $x' \geqslant x''$, если $x' - x'' \in K$ $(x', x'' \in L)$. Относительно этого отношения классическая производственная функция является монотонной, т. е. если $x' \geqslant x''$, то $f(x') \geqslant f(x'')$. Действительно,

$$f(x') = f(x' - x'' + x'') \geqslant f(x' - x'') + f(x'') \geqslant f(x'')$$

ввиду суперлинейности и неотрицательности классической производственной функции.

Кроме того, $f(0) = 0$, поскольку $f(0) = f(0 + 0) \geqslant 2f(0)$; что возможно лишь при $f(0) = 0$ или $f(0) = \pm\infty$.

Определим теперь абстрактную функцию себестоимости продукции. В случае трех видов ресурсов производства (что соответствует трехмерному пространству $L = R^3$) себестоимость представляла собой линейную функцию на R^3_+ с неотрицательными коэффициентами, первый из которых не превосходил единицы (см. п. 3.1.1). Заметим, что любая неотрицательная линейная функция на R^3_+ будет удовлетворять этому ограничению, если ее умножить на подходящую положительную константу. Перенося эту ситуацию на общий случай произвольного линейного пространства L, будем считать, что среди множества K^+ всех линейных функций на L, принимающих на конусе K неотрицательные значения, выделено некоторое подмножество S, обладающее следующим свойством: для любого $c \in K^+$ существует константа $\lambda > 0$, такая, что $\lambda c \in S$. Элементы множества S будем называть *функциями себестоимости*. Если $c \in S$, то для каждой точки x пространства ресурсов, принадлежащей конусу K, величина $c(x)$ указывает себестоимость продукции, полученной при использовании ресурсов x. Роль век-

тора структурных коэффициентов себестоимости играет функция $c \in S$, что позволяет рассматривать величину себестоимости s как функцию от двух аргументов: точки пространства ресурсов $x \in K$ и функции $c \in S \subset K^+$: $s = s(c,x)$. Областью определения функции s является множество $S \times K$, однако, пользуясь однородностью себестоимости относительно структурных коэффициентов и тем, что каждая функция $c' \in K$ может быть преобразована в функцию $c \in S$ путем умножения на константу λ, можно считать, что функция себестоимости s определена на всем множестве $K^+ \times K$.

Нормативная функция удельных затрат (минимальных затрат на единицу объема продукции) определяется теперь для любого $c \in K^+$ как

$$g(c) = \inf_{\{x \in K,\, f(x) \neq 0\}} \frac{c(x)}{f(x)}.$$

Очевидно, функция $g(c)$ неотрицательна, не принимает бесконечных значений на K и является однородной, первой степени. Кроме того, для любых c', $c'' \in K^+$

$$g(c' + c'') \geqslant \inf_{\{x \in K,\, f(x) \neq 0\}} \frac{c'(x)}{f(x)} + \inf_{\{x \in K,\, f(x) \neq 0\}} \frac{c''(x)}{f(x)} = g(c') + g(c'').$$

Обозначим через L^* линейное пространство всех линейных функций на пространстве L. Множество K^+ лежит в L^* и является конусом. Функция удельных затрат $g(c)$ определена на конусе K^+ и обладает всеми математическими свойствами классической функции.

Пусть Φ_L — множество всех пар вида (K, f), где K — конус в пространстве L; f — определенная на K классическая производственная функция. Переход от пары (K, f) к паре (K^+, g) задает отображение множества Φ_L в множество Φ_{L^*}, состоящее из пар «конус в пространстве L^*, классическая функция на конусе». Обозначим это отображение через δ.

Поскольку результатом применения отображения δ к классической функции f является также классическая функция g, его можно применить вторично, уже к паре (K^+, g). Пусть $\delta(K^+, g) = (K^{++}, h) \in \Phi_{L^{**}}$. Функция h определена на конусе K^{++}, лежащем в дважды сопряженном к L пространстве L^{++}. Его элементами являются линейные функции на пространстве L^*. В точке $u \in K^{++}$ функция h принимает значение

$$h(u) = \inf_{\{c \in K^+,\, g(c) \neq 0\}} \frac{u(c)}{g(c)}.$$

Несмотря на то что функция h определена на дважды сопряженном к K конусе K^{++}, ее можно рассматривать и как функцию на исходном конусе K. Это связано с тем, что каждому элементу $x \in K$ естественным образом ставится в соответствие функция $x^{++} \in K^{++}$, следующим образом определенная на конусе K^{++}: $x^{++}(c)$ считается равным $c(x)$ для любого $c \in K^{+}$. Так как $c(x) \geqslant 0$ при $x \in K$, то и $x^{++} \in K^{++}$. Таким образом, существует естественное отображение области определения K функции f в область определения K^{++} функции h. (Во многих случаях это отображение является вложением, а если L — конечномерное пространство и K — замкнутый конус, то $K^{++} = K$ [44].) Следовательно, функцию h можно считать определенной на исходном конусе K в соответствии с выражением

$$h(x) = \inf_{\{c \in K^{+},\, g(c) \neq 0\}} \frac{c(x)}{g(c)}.$$

Точку $x \in K$ назовем *внутренней точкой* конуса K, если для любой точки $z \in L$ найдется такое число $\varepsilon > 0$, что при любом λ, $|\lambda| \leqslant \varepsilon$, точка $x + \lambda z$ принадлежит K. Смысл этого определения в том, что внутренняя точка конуса «со всех сторон» окружена точками вида $x + \lambda z$, также лежащими в конусе. Точки, лежащие «на границе» конуса, таким свойством не обладают. Если L — n-мерное пространство, то точка $x \in K \subset L$ будет внутренней, если ее можно поместить в центр шара, целиком лежащего в K. Множество внутренних точек конуса обозначим через IK. Множество $IK \cup \{0\}$ также будет конусом. Если множество K удовлетворяет условию $\lambda K \subset K$ при любом $\lambda \geqslant 0$, то $IK \neq K$.

Теперь можно сформулировать теорему двойственности между производственными функциями и функциями удельных затрат.

Теорема двойственности для классических производственных функций. Пусть L — линейное пространство, K — конус в нем с непустой внутренностью, f — определенная на K ненулевая классическая производственная функция. Тогда $h(x) = f(x)$ для любой точки $x \in IK$.

Для доказательства теоремы нам потребуются три дополнительных утверждения — леммы 1, 2 и 3.

Лемма 1. Если $x \in IK$, то $f(x) \neq 0$.

Доказательство. Так как f не равна тождественно нулю на K, то существует точка $x_1 \in K$, в которой $f(x_1) \neq 0$. Пусть $x \in IK$ и $x \neq x_1$. Рассмотрим точку $z = x_1 - x \in L$. Поскольку x — внутренняя точка, для точки z существует такое $\varepsilon > 0$, что $x + \lambda z \in K$ при $|\lambda| \leqslant \varepsilon$. В частности, при $\lambda = -\varepsilon$ точка $x' = x - \varepsilon(x_1 - x)$ при-

надлежит K. Положим $\varepsilon' = \varepsilon/(1+\varepsilon)$. Тогда $0 < \varepsilon' < 1$, $\varepsilon' x_1 \in K$, $(1-\varepsilon')x' \in K$ и, следовательно, $\varepsilon' x_1 + (1-\varepsilon') \times \times x' \in K$. Далее, $f(\varepsilon' x_1 + (1-\varepsilon')x') \geqslant \varepsilon' f(x_1) + (1-\varepsilon') \times \times f(x')$ ввиду вогнутости функции f. Но $f(x_1) > 0$, $1-\varepsilon' > > 0$, $f(x') \geqslant 0$, значит, $f(\varepsilon' x_1 + (1-\varepsilon')x') > 0$. Поскольку $\varepsilon' x_1 + (1-\varepsilon')x' = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} x_1 + \frac{1}{1+\varepsilon} x' = x$, отсюда следует требуемое утверждение.

Таким образом, классическая производственная функция может быть равна нулю только на границе области определения.

Лемма 2. Пусть K — конус в линейном пространстве L, f — заданная на K классическая производственная функция. Тогда для любой точки $x_0 \in IK$ существует линейная функция $c_0 \in K^+$, удовлетворяющая условиям $c_0(x_0) = f(x_0)$, $c_0(x) \geqslant f(x)$ во всех точках $x \in K$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{при } x \in K; \\ \infty & \text{при } x \notin K,\ x \in L. \end{cases} \tag{3.7}$$

Функция $\varphi(x)$ определена на всем пространстве L, а множество точек, в которых $\varphi(x) < \infty$, совпадает с конусом K. Непосредственно из свойств функции f вытекает, что φ — линейно-однородная выпуклая функция.

Пусть $x_0 \in IK$. Рассмотрим в пространстве L множество точек вида $l = \lambda x_0$, где λ — произвольное действительное число. Это множество образует линейное подпространство $L_0 \subset L$. Определим на L_0 линейную функцию $d(l)$ формулой $d(l) = d(\lambda x_0) = \lambda\varphi(x_0)$. Покажем, что $d(l) \leqslant \varphi(l)$ для любого $l \in L_0$. Действительно, если $\lambda \geqslant 0$, то $d(l) = d(\lambda x_0) = = \lambda\varphi(x_0) = \varphi(\lambda x_0) = \varphi(l)$ ввиду линейной однородности функции φ. Если же $\lambda < 0$, то точка $l = \lambda x_0$ не может принадлежать K, так как если $l \in K$, то $-x_0 \in K$, откуда $0 = = f(0) = f(x_0 - x_0) \geqslant f(x_0) + f(-x_0)$. Поскольку функция f неотрицательна, последнее неравенство возможно лишь при $f(x_0) = 0$. Это, однако, противоречит лемме 1. Следовательно, $l \notin K$, т. е. $\varphi(l) = \infty$. Таким образом, $d(l) \leqslant \varphi(l)$ при любом $l \in L_0$.

Теперь покажем, что линейную функцию $d(l)$, определенную на одномерном подпространстве $L_0 \subset L$, можно продолжить до линейной функции $\overline{d}(x)$, определенной уже на всем пространстве L и удовлетворяющей условиям: $\overline{d}(l) = = d(l)$ при $l \in L_0$, $\overline{d}(x) \leqslant \varphi(x)$ при $x \in L$.

Для этого потребуется еще одно вспомогательное утверждение. Убедимся, что если функция $\overline{d}$ определена на

некотором подпространстве L', то ее можно продолжить на большее подпространство L'' вида $L'' = \{L', z\}$.

Лемма 3. Пусть K — конус в линейном пространстве L; L' — подпространство в L, имеющее непустое пересечение с IK; φ — линейно-однородная выпуклая функция, определенная на L по формуле (3.7); $\bar{d}$ — произвольная линейная функция, определенная на подпространстве L' и удовлетворяющая условию $\bar{d}(l) \leqslant \varphi(l)$ для любого $l \in L'$. Тогда для любого $z \in L$ существует линейная функция d, определенная на подпространстве $L'' = \{L', z\}$, порожденном элементами пространства L и вектором z, и такая, что

$$d(l) = \bar{d}(l) \text{ при } l \in L';$$

$$d(x) \leqslant \varphi(x) \text{ при } x \in L''.$$

Доказательство. Пусть $z \in L$, $I(z) = \inf\limits_{l \in L'} \{\varphi(l + z) - \bar{d}(l)\}$, $S(z) = \sup\limits_{l \in L'} \{\bar{d}(l) - \varphi(l - z)\}$.

Если l_1 и l_2 — произвольные элементы пространства L', то из линейности функции $\bar{d}$ и выпуклости функции φ следует, что $d(l_1) + d(l_2) = \bar{d}(l_1 + l_2) \leqslant \varphi(l_1 + l_2) = \varphi(l_1 - z + l_2 + z) \leqslant \varphi(l_1 - z) + \varphi(l_2 + z)$, т. е. $\varphi(l_2 + z) - \bar{d}(l_2) \geqslant d(l_1) - \varphi(l_1 - z)$. Отсюда $S(z) \leqslant I(z)$. Покажем, что $I(z) \neq -\infty$. В самом деле, если $I(z) = -\infty$ то ввиду неравенства $S(z) \leqslant I(z)$ величина $S(z)$ также равна $-\infty$. По определению $S(z)$ отсюда следует, что $\varphi(l - z) = \infty$ при любом $l \in L'$.

Это, однако, невозможно, так как по условию леммы пространство L' содержит точку l', являющуюся внутренней для конуса K. Значит, для точки $z' = -z$ существует такое число $\varepsilon > 0$, что при любом δ, по модулю не превосходящем ε, точка $l' + \delta z' = l' - \delta z$ принадлежит K. В частности, при $\delta = \varepsilon$ получаем, что $\varphi(l' - \varepsilon z) < \infty$. Так как $\varepsilon > 0$, то величина $\varphi(l'/\varepsilon - z)$ также конечна. Следовательно, $I(z) > -\infty$.

Теперь аналогичным образом убедимся в том, что $S(z) \neq +\infty$. Действительно, в противном случае $I(z)$ также равно бесконечности, что возможно лишь при условии $\varphi(l + z) = \infty$ при любом $l \in L'$. Пусть $l' \in L' \cap (IK)$. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что при $|\delta| \leqslant \varepsilon$ $l' + \delta z \in K$. Отсюда следует, что $\varphi(l'/\varepsilon + z) < \infty$. Полученные результаты показывают, что при любом фиксированном $z \in L$ числа $S(z)$ и $I(z)$ не могут одновременно равняться $-\infty$ или $+\infty$. Значит, можно утверждать, что существует конечное число α, удовлетворяющее условию $S(z) \leqslant \alpha \leqslant I(z)$. Это число α мы и используем для построения функции d. Поскольку любая

точка $x \in \{L', z\}$ единственным образом представима в виде $x = l + \beta z$, где β — действительное число, определим значение функции d в точке $x = l + \beta z$ как $d(x) = \bar{d}(l) + \beta\alpha$. Покажем, что $d(x) \leqslant \varphi(x)$ при любом $x \in L'$. Отдельно рассмотрим два случая: 1) $x = l + \beta z$, где $\beta > 0$; 2) $x = l + \beta z$, где $\beta < 0$. В первом случае из условия $\alpha \leqslant I(z)$ вытекает, что $\alpha \leqslant \varphi(l/\beta + z) - \bar{d}(l/\beta)$. Отсюда $\beta\alpha \leqslant \varphi(l + \beta z) - \bar{d}(l)$ и $d(x) = \bar{d}(l) + \beta\alpha \leqslant \varphi(l + \beta z) = \varphi(x)$.

Во втором случае для доказательства используется условие $S(z) \leqslant \alpha$. Непосредственно из определения $S(z)$ вытекает, что при любом $l' \in L'$, в частности при $l' = -l/\beta$ имеет место неравенство $\alpha \geqslant \bar{d}(-l/\beta) - \varphi(-l/\beta - z)$. Умножая его на число $\beta < 0$, получаем, что $\beta\alpha \leqslant \bar{d}(-l) - \beta\varphi(-l/\beta - z) = -\bar{d}(l) + (-\beta)\varphi(-l/\beta - z) = -d(\bar{l}) + \varphi \times (l + \beta z)$. Отсюда следует, что $d(x) = \bar{d}(l) + \beta\alpha \leqslant \varphi(l + \beta z)$ при $\beta < 0$.

Таким образом, показано, что при любом $z \in L$ линейная функция $\bar{d}$, определенная на подпространстве $L' \subset L$, содержащем хотя бы одну внутреннюю точку конуса K, может быть продолжена на большее подпространство $L'' = \{L', z\}$ с сохранением условия $\bar{d}(x) \leqslant \varphi(x)$. Лемма 3 доказана.

Завершим теперь доказательство леммы 2. Оно было прервано после построения линейной функции d, которая определена на одномерном подпространстве L_0, имеющем непустое пересечение с IK, и удовлетворяет условию $d(l) \leqslant \varphi(l)$ при любом $l \in L_0$.

Чтобы продолжить эту функцию на все пространство L с сохранением этого условия, рассмотрим множество B, состоящее из всех пар вида (M, c), где M — линейное подпространство в L, содержащее L_0; c — определенная на M линейная функция, совпадающая с d на подпространстве L_0 и не превышающая φ на подпространстве M. Множество B непусто, так как $(L_0, d) \in B$. Введем на B частичный порядок, считая, что $(M_1, c_1) \leqslant (M_2, c_2)$, если M_2 содержит M_1 и c_2 совпадает c_1 на подмножестве M_1. Каждая цепь $(M_1, c_1) \leqslant (M_2, c_2) \leqslant \ldots \leqslant (M_i, c_i) \leqslant \ldots$ имеет верхнюю грань в B. Этой гранью будет пара $(\bar{M}, \bar{c})$, где $\bar{M} = \bigcup_i M_i$, а функция $\bar{c}$ принимает в точке $x \in M_i$ значение $\bar{c}(x) = c_i(x)$ (это определение корректно).

Легко убедиться в том, что $\bar{M}$ является линейным подпространством в L, а $\bar{c}$ — линейной функцией на $\bar{M}$, совпадающей с d на множестве L_0 и не превосходящей φ на $\bar{M}$.

Согласно известной лемме Цорна отсюда вытекает существование максимального элемента в множестве B, т. е. такого элемента $(\widetilde{M}, \widetilde{c})$, что из условия $(\widetilde{M}, \widetilde{c}) \leqslant (M, c)$, где $(M, c) \in B$, следует, что $M = \widetilde{M}$, $c = \widetilde{c}$. Этот максимальный элемент $(\widetilde{M}, \widetilde{c})$ и является искомым продолжением функции d на все пространство L. Действительно, линейное подпространство $\widetilde{M}$ и определенная на нем линейная функция $\widetilde{c}$ удовлетворяют условию леммы 3, так как $\widetilde{M}$ содержит L_0 и, следовательно, имеет непустое пересечение с IK. Теперь если $\widetilde{M} \neq L$ и $z \in L/\widetilde{M}$, то согласно лемме 3 функцию $\widetilde{c}$ можно продолжить на подпространство $\{\widetilde{M}, z\}$ с сохранением условия $\widetilde{c}(x) \leqslant \varphi(x)$. Это противоречит максимальности элемента $(\widetilde{M}, \widetilde{c})$. Таким образом, $\widetilde{M} = L$ и $\widetilde{c}$ — линейная функция, совпадающая с d на множестве L_0 и не превосходящая φ во всех остальных точках $x \in L$.

Для завершения доказательства леммы 2 определим функцию c_0 по правилу $c_0(x) = -\widetilde{c}(x)$ при $x \in L$. Функция c_0 линейна, в точке $x_0 \in L_0$ принимает значение $c_0(x_0) = -\widetilde{c}(x_0) = -d(x_0) = -\varphi(x_0) = f(x_0)$, а в остальных точках $x \in L$ удовлетворяет условию $c_0(x) = -\widetilde{c}(x) \geqslant -\varphi(x) = f(x) \geqslant 0$. Лемма 2 доказана.

Закончим доказательство теоремы двойственности. Необходимо убедиться, что

$$h(x_0) = \inf_{\{c \in K^+,\, g(c) \neq 0\}} \frac{c(x_0)}{g(c)} = f(x_0),$$

где $x_0 \in IK$. Для этого достаточно установить, что а) $f(x_0) \leqslant c(x_0)/g(c)$ при любой функции $c \in K^+$, для которой $g(c) \neq 0$, и б) существует такая линейная функция $c_0 \in K^+$, что $g(c_0) \neq 0$ и $f(x_0) = c_0(x_0)/g(c_0)$.

Докажем первое из этих утверждений. Поскольку по определению $g(c) = \inf\limits_{\{x \in K,\, f(x) \neq 0\}} \dfrac{c(x)}{f(x)}$, то для любой точки $x \in K$, где $f(x) \neq 0$, имеет место неравенство $g(c) \leqslant c(x)/f(x)$. Если $g(c) \neq 0$, то отсюда $f(x) \leqslant c(x)/g(c)$. В частности, это неравенство верно для $x = x_0$, так как по лемме 1 $f(x_0) \neq 0$. Следовательно, пункт а) доказан. Далее, согласно лемме 2 существует линейная на L и неотрицательная на K функция c_0, удовлетворяющая условиям $c_0(x_0) = f(x_0)$, $c_0(x) \geqslant f(x)$ при любом $x \in K$. Для этой функции $c_0(x)/f(x) \geqslant 1$ при любом $x \in K$, $f(x) \neq 0$, причем при $x = x_0$ $c_0(x_0)/f(x_0) = 1$. Следовательно, $g(c_0) = \inf\limits_{\{x \in K,\, f(x) \neq 0\}} \dfrac{c_0(x)}{f(x)} = \dfrac{c_0(x_0)}{f(x_0)} = 1$.

Отсюда вытекает утверждение пункта б). Теорема двойственности для производственных функций доказана.

Остается заметить, что равенство $h(x) = f(x)$ не распространяется, вообще говоря, на все точки конуса K. Приведем пример функции $f(x)$, которая совпадает со своей дважды сопряженной функцией $h(x)$ на внутренности конуса и отлична от нее в точках его границы.

Пусть $L = R^2$, $K = \{(x_1, x_2) | x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0, \ x_1 \leqslant x_2\}$. Функцию $f(x)$ зададим на K следующим образом:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \sqrt{x_1, x_2}, & \text{если } 0 \leqslant x_1 < x_2; \\ 0, & \text{если } x_1 = x_2. \end{cases}$$

Непосредственные вычисления показывают, что $IK^+ = \{(c_1, c_2) | c_2 > 0, \ c_1 + c_2 > 0\}$,

$$g(c_1 c_2) = \begin{cases} 0, & \text{если } c_2 = 0; \\ c_1 + c_2, & \text{если } c_1 \leqslant c_2; \\ 2\sqrt{c_1 c_2}, & \text{если } c_1 > c_2, \end{cases}$$

$$h(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2}.$$

Таким образом, функции $h(x_1, x_2)$ и $f(x_1, x_2)$ совпадают во внутренности конуса, т. е. при $0 < x_1 < x_2$, и различаются на части его границы, а именно при $x_1 = x_2$. Усилить доказанную теорему двойственности для произвольных классических производственных функций, распространив ее формулировку на весь конус K, следовательно, нельзя.

При различных ограничениях на пространство L и функцию f можно получить более сильные утверждения, чем доказанная теорема. Так, если $L = R^n$ — конечномерное действительное пространство, f — непрерывная функция, то можно дополнительно доказать [8] равенство $h(x)$ и $f(x)$ не только внутри, но и на границе конуса K.

Следствие. Пусть $L = R^n$, K — замкнутый конус с непустой внутренностью, f — определенная на K непрерывная классическая производственная функция. Тогда отображение δ является *инволютивным*, т. е. $\delta \circ \delta = 1$.

3.1.3. Определение вида и параметров функции удельных затрат

Использование двойственности между производственными функциями и функциями минимальных удельных затрат позволяет определить вид нормативной функции удельных затрат в зависимости от вида производственной функции. Рассмотрим конкретные применения теоремы двой-

ственности для класса функций с постоянной эластичностью замены по Михалевскому *CESM*. Согласно п. 2.2.5 такие функции имеют либо вид

$$y=(a_1 x_1^{\beta}+\ldots+a_n x_n^{\beta})^{1/\beta}, \tag{3.8}$$

где $\beta \neq 0$, $\beta < 1$, либо вид

$$y=a_0 x_1^{a_1} \ldots x_n^{a_n}. \tag{3.9}$$

Найдем двойственную функцию для функции (3.8). Согласно известному неравенству Гельдера для любых неотрицательных чисел $v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_n$ и любых чисел p, q, таких, что $-\infty < p < 1$, $-\infty < q < 1$ и $1/p + 1/q = 1$, имеет место соотношение

$$\sum_{i=1}^{n} v_1 w_i \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} v_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} w_i^q\right)^{1/q}, \tag{3.10}$$

причем при $v_i = \lambda w_i^{1/(p-1)}$, $i = 1, \ldots, n$, $\lambda > 0$ (3.10) переходит в равенство. Полагая в (3.10) $p = 1 - 1/\sigma$,

$$q = 1/(1-\sigma),\ v_i = x_i a_i^{1/p},\ w_i = c_i a_i^{-1/p},$$

получим, что

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^{1-1/\sigma}\right)^{\sigma/(\sigma-1)} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\sigma} c_i^{1-\sigma}\right)^{1/(1-\sigma)}. \tag{3.11}$$

Так как равенство здесь достигается при $x_i = c_i a_i^{\sigma} \geqslant 0$, то

$$\delta(f)(c_1, \ldots, c_n) = g(c_1, \ldots, c_n) = (a_1^{\sigma} c_1^{1-\sigma} + \ldots + a_n^{\sigma} c_n^{1-\sigma})^{1/(1-\sigma)}. \tag{3.12}$$

Значит, если производственной функцией системы является классическая функция с положительной постоянной эластичностью замены факторов σ, то функцией затрат на 1 руб. продукции также будет классическая функция с постоянной и положительной эластичностью замены, равной $1/\sigma$, и наоборот.

Переходя в неравенстве (3.11) к пределу при $\sigma \to 1$ и учитывая, что $a_1 + \ldots + a_n = 1$, получим, что

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \geqslant x_1^{a_1} \ldots x_n^{a_n} \left(\frac{c_1}{a_1}\right)^{a_1} \ldots \left(\frac{c_n}{a_n}\right)^{a_n}.$$

Следовательно, двойственной к функции Кобба — Дугласа (3.9) является функция

$$z = \frac{1}{a_0} \frac{1}{a_1^{a_1} \ldots a_n^{a_n}} c_1^{a_1} \ldots c_n^{a_n}. \qquad (3.13)$$

Таким образом, мы видим, что если производственной функцией системы является классическая функция Кобба—Дугласа с коэффициентами эластичности выпуска по факторам $a_1, \ldots, a_n$, то нормативной функцией затрат на 1 руб. продукции будет также функция Кобба — Дугласа с теми же коэффициентами эластичности по факторам; меняется лишь мультипликативная константа.

Этот факт может служить некоторым подтверждением правомерности использования функций типа Кобба—Дугласа при моделировании не только выпуска товарной продукции, но и других экономических показателей, в частности при анализе влияния факторов на себестоимость продукции.

Найдем теперь функцию, двойственную к линейной функции $y = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$. Из неравенства $\min\left(\frac{v_1}{w_1}, \ldots, \frac{v_n}{w_n}\right) \leqslant \frac{v_1 + \ldots + v_n}{w_1 + \ldots + w_n}$, справедливого для любых неотрицательных чисел $v_1, \ldots, v_n$; $w_1, \ldots, w_n$, следует, что

$$\delta(a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n) = \min_{x \geqslant 0} \frac{c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n}{a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n} \geqslant$$

$$\geqslant \min\left(\frac{c_1}{a_1}, \ldots, \frac{c_n}{a_n}\right).$$

Поскольку при $x = (\underbrace{0 \ldots 0}_{k-1} 1\ 0 \ldots 0)$, где число k определено условием $\frac{c_k}{a_k} = \min\left(\frac{c_1}{a_1}, \ldots, \frac{c_n}{a_n}\right)$, это неравенство обращается в равенство, то

$$\delta(a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n) = \min\left(\frac{c_1}{a_1}, \ldots, \frac{c_n}{a_n}\right).$$

Таким образом, если производственной функцией системы является линейная функция, то функцией минимальных затрат на 1 руб. продукции является функция Леонтьева, и наоборот. Связи между наиболее распространенными видами классических производственных функций и нормативных функций затрат на 1 руб. продукции приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

№ п/п	Производственная функция	Функция затрат на 1 руб. продукции
1	Функция *CESM* с эластичностью замены факторов σ, $0 < \sigma < \infty$	Функция *CESM* с эластичностью замены факторов $\frac{1}{\sigma}$, $0 < \frac{1}{\sigma} < \infty$
2	Функция Кобба — Дугласа с эластичностями выпуска $a_1, \ldots, a_n$	Функция Кобба — Дугласа с эластичностями выпуска $a_1, \ldots, a_n$
3	Линейная функция с коэффициентами $a_1, \ldots, a_n$	Функция Леонтьева с коэффициентами $a_1, \ldots, a_n$
4	Функция Леонтьева с коэффициентами $a_1, \ldots, a_n$	Линейная функция с коэффициентами $a_1, \ldots, a_n$

3.2. ФАКТОРНЫЕ МОДЕЛИ АНАЛИЗА ПРИБЫЛИ НА ОСНОВЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

3.2.1. Понятие и основные свойства функции прибыли

Прибыль социалистического предприятия, объединения, отрасли является, наряду с затратами на 1 руб. произведенной продукции, одним из важных планируемых показателей эффективности производства. Годовые издержки производства, себестоимость продукции, как показано в п. 3.1.1, могут быть выражены через объемы производственных ресурсов в виде линейной функции $s(c, x) = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$, где $x_1, \ldots, x_n$ — показатели ресурсов, $c_1, \ldots, c_n$ — структурные коэффициенты себестоимости. Если $f(x_1, \ldots, x_n)$ — производственная функция, то прибыль $p(c, x) = f(x) - s(c, x)$ зависит от объемов используемых ресурсов и структурных коэффициентов себестоимости. При анализе итогов деятельности объединения (отрасли) за год и формировании годовых и перспективных планов необходимо оценить максимально возможную величину прибыли, достигаемую при различных вариантах использования ресурсов. Эта величина выражается как

$$p(c) = \sup_x (f(x) - cx)$$

и носит название *нормативной функции прибыли*. Ее аргументами, так же как и для функции удельных затрат, являются структурные коэффициенты себестоимости. Если в

качестве аргументов производственной функции выступают основные фонды x_1, оборотные средства x_2 и численность промышленно-производственного персонала x_3, то факторами нормативного объема прибыли служат: средняя по видам фондов норма амортизационных отчислений c_1, отношение материальных затрат к размеру оборотных средств c_2 и средняя заработная плата c_3. Если функция $f(x)$ определена на конусе K в линейном пространстве L, то $p(c)$ определена на двойственном конусе K^+, состоящем из всех линейных функций, определенных на пространстве L и принимающих на K неотрицательные значения.

Рассмотрим основные свойства нормативной функции прибыли.

1. Функция $p(c)$, определенная на непустом конусе $K^+ \subset \subset L$, неотрицательна. Это вытекает из того, что

$$p(c) = \sup_{x \in K} (f(x) - cx) \geqslant f(0) \geqslant 0.$$

2. Функция $p(c)$ выпукла, если $f(x)$ вогнута.

Назовем функцию *тривиальной*, если она принимает только значение 0 или $+\infty$.

3. Если степень однородности производственной функции $f(x)$ больше или равна единице, то функция прибыли тривиальна.

Действительно, пусть степень однородности функции $f(x)$ равна $\gamma \geqslant 1$. Тогда

$$p(c) = \sup_{\{\lambda \geqslant 0,\ x \in K\}} (f(\lambda x) - \lambda(cx)) = \sup_{\{\lambda \geqslant 0,\ x \in K\}} (\lambda(\lambda^{\gamma-1} f(x) - cx)).$$

Если существует хотя бы одна точка $x_0 \in K$, для которой прибыль $f(x_0) - cx_0$ при данном c положительна, то

$$\sup_{x \in K,\ \lambda \geqslant 0} (\lambda(\lambda^{\gamma-1} f(x) - cx)) = +\infty.$$

В противном случае

$$\sup_{\lambda \geqslant 0,\ x \in K} (\lambda(\lambda^{\gamma-1} f(x) - c(x))) = 0.$$

Сравнение с нормативной функцией удельных затрат $g(c)$ показывает, что в случае $\gamma > 1$ тривиальны обе функции; если же $\gamma \leqslant 1$, то тривиальность одной из них как бы компенсируется нетривиальностью другой (табл. 3.2).

Если $K = R^n_+$, а функция $f(x)$ дифференцируема, то точка максимума функции $f(x) - cx$ может быть найдена из соотношений

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = c_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.14}$$

Таблица 3.2

№ п/п	Степень однородности функции $f(x)$	Функция прибыли $p(c)$	Функция удельных затрат $g(c)$
1	$\gamma < 1$	нетривиальна	тривиальна
2	$\gamma = 1$	тривиальна	нетривиальна
3	$\gamma > 1$	тривиальна	тривиальна

Для однородной функции $f(x)$ в силу теоремы Эйлера функция прибыли выражается как

$$p(c) = (1/\gamma - 1)cx^0, \tag{3.15}$$

где x^0 — решение системы (3.14).

Как отмечалось выше, функция нормативной прибыли $p(c)$ играет в ситуации, когда степень однородности $\gamma < 1$, ту же роль, что и функция нормативных удельных затрат $g(c)$ в ситуации, когда $\gamma = 1$. Используя функцию $p(c)$, можно также косвенно определить объем выпуска через размер совокупных затрат $c(x)$. Величина $q(c_1x) = p(c) + c(x)$ выражает объем выпуска при использовании ресурсов x в зависимости от вектора структурных коэффициентов себестоимости. Гарантированный выпуск (при наихудших коэффициентах c) составит

$$q(x) = \inf_{c \in K^+} (p(c) + c(x)).$$

Функцию $q(x)$ по аналогии с функцией $h(x)$ можно назвать *нормативной функцией выпуска*. Ее соотношение с производственной функцией описывается доказываемой ниже теоремой: если нормативная функция прибыли строилась на основе производственной функции, то нормативный объем выпуска совпадает с объемом выпуска, найденным непосредственно по производственной функции. Экономическая интерпретация равенства $q(x) = f(x)$ такая же, как и равенства $h(x) = f(x)$.

3.2.2. Связь между производственной функцией и функцией прибыли

Переход от производственной функции $f(x)$ к функции прибыли $p(c)$ задает отображение ω, определенное на множестве однородных, вогнутых, неотрицательных функций на конусе $K \subset L$ и принимающее значение в множестве неотрицательных выпуклых функций на конусе $K^+ \subset L^*$, ω: $f \to p$. Отображение ω тесно связано с классическим преобразованием Юнга — Фенхеля — Моро [54]. Это преоб-

разование (обычно обозначаемое знаком*) переводит выпуклую функцию $\varphi(x)$ в сопряженную функцию $\varphi^*(x) = \sup\limits_{x \in L} (cx - \varphi(x))$.

Если sup в этой формуле рассматривать не на всем пространстве L, а на конусе $K \subset L$, то связь между преобразованием ω и преобразованием Юнга — Фенхеля — Моро выражается следующим образом: $p(c) = \omega(f)(c) = (-f)^*(-c)$, $c \in K^+$. Применяя к выпуклой функции $p(c)$ преобразование Юнга — Фенхеля — Моро, получим во всех случаях тривиальную функцию:

$$p^*(x) = \sup_{c \in K^+} (cx - p(c)) = \infty.$$

Применить к функции $p(c)$ преобразование ω вторично, строго говоря, невозможно, так как $p(c)$ — выпуклая функция, а ω определено на множестве вогнутых функций. Поэтому говорить об инволютивности преобразования (в отличие от преобразования δ) нет оснований. Тем не менее во многих случаях производственную функцию f можно почти полностью восстановить по функции p. Роль обратного для отображения ω выполняет отображение ω^{-1}, определенное следующим образом:

$$\omega^{-1}(p)(x) = \inf_{c \in K^+} (p(c) + cx).$$

Через преобразование Юнга — Фенхеля — Моро оно выражается в виде

$$\omega^{-1}(p)(x) = -(p^*(-x)).$$

Теорема о связи между производственной функцией и нормативной функцией прибыли. Пусть $f(x)$ — определенная на конусе K неоклассическая производственная функция степени однородности $\gamma < 1$; $p(c)$ — нормативная функция прибыли; $q(x) = \inf\limits_{c \in K^+} (p(c) + c(x))$. Тогда для любого $x \in IK$ имеем $q(x) = f(x)$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы двойственности и опирается на лемму 2 п. 3.1.2. Рассмотрим линейное пространство L', образованное всевозможными парами вида $l' = (t, x)$, где t — действительное число, $x \in L$. Подмножество $K' = \{(t, x)/t \geqslant 0, x \in K\}$ является конусом в пространстве L'. Определим на этом конусе функцию $F(t, x)$ по правилу

$$F(t, x) = \begin{cases} tf(x/t) & \text{при } t \neq 0; \\ 0 & \text{при } t = 0. \end{cases}$$

Убедимся, что $F(t, x)$ — классическая функция. Очевидно, что для любого $\lambda > 0$ $F(\lambda t, \lambda x) = \lambda F(t, x)$. Далее, пусть $\lambda', \lambda'' \geqslant 0$, $\lambda' + \lambda'' = 1$, $(t', x') \in K'$, $(t'', x'') \in K'$. Тогда при $t' > 0$, $t'' > 0$

$$F(\lambda' t' + \lambda'' t'', \lambda' x' + \lambda'' x'') =$$
$$= (\lambda' t' + \lambda'' t'') f\left(\frac{\lambda' t'}{\lambda' t' + \lambda'' t''} \frac{x'}{t'} + \frac{\lambda'' t''}{\lambda' t' + \lambda'' t''} \frac{x''}{t''}\right) \geqslant$$
$$\geqslant (\lambda' t' + \lambda'' t'')\left(\frac{\lambda' t'}{\lambda' t' + \lambda'' t''} f\left(\frac{x'}{t'}\right) +\right.$$
$$\left. + \frac{\lambda'' t''}{x' t' + \lambda'' t''} f\left(\frac{x''}{t''}\right)\right) = \lambda' F(t', x') + \lambda'' F(t'', x'')$$

ввиду вогнутости функции f.

Если $t' = 0$, то $F(t', x') = 0$ и $F(\lambda'' t'', \lambda' x' + \lambda'' x'') = \lambda'' t'' f\left(\frac{\lambda' x' + \lambda'' x''}{\lambda'' t''}\right) = \lambda'' t'' f\left(\frac{\lambda' x'}{\lambda'' t''} + \frac{x''}{t''}\right)$. Пусть $\alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$ — произвольные числа. Тогда $f\left(\frac{\lambda' x'}{\lambda'' t''} + \frac{x''}{t''}\right) = f\left(\frac{\alpha \lambda' x'}{\lambda'' t'' \alpha} + \frac{\beta x''}{t'' \beta}\right) \geqslant \alpha^{1-\nu} f\left(\frac{\lambda' x'}{\lambda'' t''}\right) + \beta^{1-\nu} f\left(\frac{x''}{t''}\right)$ ввиду вогнутости функции f. Отсюда $F(\lambda'' t'', \lambda' x' + \beta'' x'') \geqslant$
$$\geqslant \lambda'' t'' \sup_{\substack{\alpha, \beta > 0 \\ \alpha + \beta = 1}} \left(\alpha^{1-\nu} f\left(\frac{\lambda' x'}{\lambda'' t''}\right) + \beta^{1-\nu} f\left(\frac{x''}{t''}\right)\right) \geqslant \lambda'' t'' f\left(\frac{x''}{t''}\right).$$

Если $t' = t'' = 0$, то левая и правая части требуемого неравенства равны нулю. Вогнутость функции F доказана.

Пусть $x_0 \in IK$. Покажем, что $(1, x_0) \in IK'$. Пусть (t, z) — произвольная точка пространства L'. Так как точка x_0 внутренняя, то существует число $\varepsilon > 0$, такое, что $x_0 + \delta z \in K$ при $|\delta| \leqslant \varepsilon$. Положим, $\varepsilon' = \min(\varepsilon, 1/t)$. Тогда, если $|\delta| \leqslant \varepsilon'$, то $(1, x_0) + \delta(t, z) = (1 + \delta t, x_0 + \delta z) \in K$, так как $1 + \delta z \geqslant 0$, $x_0 + \delta z \in K$.

Таким образом, F — классическая функция, определенная на конусе K' линейного пространства L'; $(1, x_0)$ — внутренняя точка этого конуса. Согласно лемме 2 п. 3.1.2 существует линейная функция $c_0(t, x)$, определенная на пространстве L' и удовлетворяющая условиям:

$$c_0(1, x_0) = F(1, x_0);$$
$$c_0(t, x) \geqslant F(t, x) \text{ при любых } (t, x) \in K'.$$

Поскольку функция c_0 линейна на L', $c_0(t, x) = c_0(0, x) + c_0(t, 0)_1 = c_0(0, x) + tc_0(1, 0)$, причем функция $d_0(x) = c_0(0, x)$ определена на пространстве L и также линейна.

Теперь

$$d_0(x_0) = f(x_0) - c_0(1, 0);$$

$$d_0(x) = c_0(1, x) - c_0(1, 0) \geqslant f(x) - c_0(1, 0) \text{ при } x \in K.$$

Отсюда

$$p(d_0) = \sup_{x \in K}(f(x) - d_0(x)) = c_0(1,0).$$

Найдем теперь $q(x_0) = \inf\limits_{c \in K^+} (p(c) + c(x_0))$.

Поскольку по определению $p(c) \geqslant f(x) - c(x)$ для любых $c \in K^+$, $x \in K$, то $f(x_0) \leqslant p(c) + c(x_0)$ при любом $c \in K^+$. Значит, $q(x_0) \geqslant f(x_0)$ при $c = d_0$. Кроме того, $p(d_0) + d_0(x_0) = c_0(1, 0) + f(x_0) - c_0(1, 0) = f(x_0)$. Следовательно, нижняя грань множества сумм $p(c) + c(x_0)$ на конусе K^+ достигается при $c = d_0$ и равна $f(x_0)$. Теорема доказана.

Таким образом, на внутренности конуса K неоклассическая производственная функция f полностью восстанавливается по функции прибыли p. Если f непрерывна и ее значения на границе конуса определяются значениями внутри K, то равенство функций f и q, как можно доказать, гарантировано на всем конусе K.

Экономическая интерпретация доказанной теоремы такая же, как и интерпретация теоремы о связи производственных функций и функций удельных затрат.

Как отмечалось в п. 3.1.2, функция Кобба — Дугласа с точностью до мультипликативной константы инвариантна относительно действия оператора двойственности δ, причем является единственной инвариантной функцией среди функций вида $CESM$. Для преобразования Юнга — Фенхеля — Моро(*) инвариантной является только [54] функция вида $y = \frac{1}{2}(x_1^2 + \ldots + x_n^2)$.

Что же касается преобразования ω, то единственной функцией, инвариантной относительно ω, является константа.

3.2.3. Определение вида и параметров функции прибыли

Рассмотрим некоторые конкретные виды производственных функций и определим вид соответствующих им функций прибыли.

Пусть $f(x)$ — функция постоянной эластичности замены факторов по Михалевскому

$$y = (a_1 x_1^b + \ldots + a_n x_n^b)^{\nu/b}.$$

Точка x^0, в которой прибыль достигает максимума, удовлетворяет системе уравнений (3.14), в данном случае имеющей вид:

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = \gamma a_i (a_1 x_1^b + \ldots + a_n x_n^b)^{\gamma/b-1}, \quad x_i^{b-1} = c_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Отсюда

$$x_i = x_1 \left(\frac{c_i a_1}{c_1 a_i}\right)^{\frac{1}{b-1}}$$

Подставляя эти значения в первое уравнение и разрешая его относительно x_1, получим, что

$$x_1^0 = (a_1 \gamma)^{\frac{1}{1-\gamma}} c^{\frac{1}{\gamma-1}} \left(a_1 + a_2 \left(\frac{c_2 a_1}{c_1 a_2}\right)^{\frac{b}{b-1}} + \right.$$

$$\left. + \ldots + a_n \left(\frac{c_n a_1}{c_1 a_n}\right)^{\frac{b}{b-1}}\right)^{\frac{1-\frac{\gamma}{b}}{\gamma-1}}.$$

Теперь

$$p(c) = (1-\gamma)\gamma^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \left(a_1^{\frac{1}{1-b}} c_1^{\frac{b}{b-1}} + \ldots + \right.$$

$$\left. + a_n^{\frac{1}{1-b}} c_n^{\frac{b}{b-1}}\right)^{\left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \Big/ \frac{b}{b-1}\right)}.$$

Таким образом, если производственная функция относится к классу функций *CESM* с эластичностью замены факторов σ, то нормативной функцией прибыли также будет функция *CESM* с эластичностью замены факторов $1/\sigma$. Степень однородности нормативной функции прибыли равна $\gamma/(\gamma - 1)$, где γ — степень однородности производственной функции.

Если $f(x)$ имеет вид функции Кобба — Дугласа, то $p(c)$ также будет функцией такого же вида. Действительно, если $y = a_0 x_1^{a_1} \ldots x_n^{a_n}$, то точка максимума прибыли удовлетворяет условиям:

$$a_0 a_i x_1^{a_1} \ldots x_{i-1}^{a_{i-1}} x_i^{a_i - 1} x_{i+1}^{a_{i+1}} \ldots x_n^{a_n} = c_i, \quad i = 2, \ldots, n.$$

Пользуясь формулой (3.15), получим

$$p(c) = (1-\gamma) a_0^{\frac{1}{1-\gamma}} a_1^{\frac{a_1}{1-\gamma}} \ldots a_n^{\frac{a_n}{1-\gamma}} c_1^{\frac{a_1}{\gamma-1}} \ldots c_n^{\frac{a_n}{\gamma-1}}.$$

Таким образом, производственной функции Кобба — Дугласа соответствует нормативная функция прибыли Кобба — Дугласа.

Далее, если f — степень линейной функции

$$y=(a_1x_1+\ldots+a_nx_n)^{\gamma},\ \gamma<1,$$

то

$$p(c)=\begin{cases} 0, & \text{если } c_1:c_2:\ldots:c_n\neq a_1:\ldots:a_n; \\ (1-\gamma)\,\gamma^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}\left(\frac{c_1}{a_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, & \text{если } \frac{c_1}{a_1}=\ldots=\frac{c_n}{a_n}. \end{cases}$$

Наконец, если f — функция $CESA$ вида

$$y=(a_1x_1^b+\ldots+a_kx_k^b)^{\frac{\gamma_1}{b}}\,x_{k+1}^{\gamma_{k+1}}\ldots x_n^{\gamma_n}\ (b\neq 0,\ b\neq 1),$$

то нормативная функция прибыли равна:

$$p=\gamma_0\gamma_1^{\frac{\gamma_1}{\gamma_0}}\gamma_{k+1}^{\frac{\gamma_{k+1}}{\gamma_0}}\ldots\gamma_n^{\frac{\gamma_n}{\gamma_0}}\left(a_1^{\frac{1}{b-1}}c_1^{\frac{b}{b-1}}+\ldots+\right.$$
$$\left.+a_k^{\frac{1}{b-1}}c_k^{\frac{b}{b-1}}\right)^{\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_0}\Big/\frac{b}{1-b}\right)}c_{k+1}^{-\frac{\gamma_{k+1}}{\gamma_0}}\ldots c_n^{-\frac{\gamma_n}{\gamma_0}},$$

где $\gamma_0=1-\gamma_1-\gamma_{k+1}-\ldots-\gamma_n$. Функция $p(c)$ принадлежит, следовательно, к тому же классу $CESA$, что и производственная функция. В частности, для трехфакторной функции $CESA$

$$y=(0{,}53214x_1^{-0{,}10321}+0{,}29986x_2^{-0{,}10321})^{-\frac{0{,}81004}{0{,}10321}}x_3^{0{,}13287},$$

построенной в п. 2.6 для ПО, нормативная функция прибыли равна:

$$p=0{,}000026\,(1{,}77151c_1^{0{,}09355}+$$
$$+2{,}97951c_2^{0{,}09355})^{-\frac{0{,}81004}{0{,}00534}}c_3^{-\frac{0{,}13287}{0{,}05709}}.$$

Виды нормативных функций прибыли, соответствующих производственным функциям с постоянной эластичностью замены факторов по Михалевскому, даны в табл. 3.3.

Сравнивая три вида двойственных соотношений — оператор δ, преобразование* и отображение ω, можно сделать вывод об определенной общности их свойств, важнейшим из которых является то, что функции с постоянной эластичностью замены факторов σ переходят в функции с постоянной эластичностью факторов $1/\sigma$. При этом исследованные

Таблица 3.3

№ п/п	Производственная функция	Нормативная функция прибыли
1	Функция *CESM* степени однородности $\gamma < 1$ с эластичностью замены факторов σ	Функция *CESM* степени однородности $\gamma/(\gamma-1)$ с эластичностью замены факторов $1/\sigma$
2	Функция Кобба — Дугласа степени однородности $\gamma < 1$ с эластичностями выпуска $a_1, \ldots, a_n$	Функция Кобба — Дугласа степени однородности $\gamma/(\gamma-1)$ с эластичностями выпуска $a_1, \ldots, a_n$
3	Линейная функция с коэффициентами $a_1, \ldots, a_n$, возведенная в степень $\gamma < 1$	Функция, совпадающая со степенной функцией $kc_1^{\gamma/(\gamma-1)}$ (k — константа) на луче $c_i/a_i = \text{const}$, $i = 1, \ldots, n$, и равная нулю вне этого луча

преобразования взаимно дополняют друг друга: там, где тривиально действие двух из них, нетривиально действие третьего. Все это дает основание полагать, что эти виды двойственности служат проявлениями некоторой общей связи между прямой и сопряженной функциями.

При практическом использовании функций $g(c)$ и $p(c)$ нужно учитывать, что определяемые ими минимальные значения удельных затрат и максимальные значения прибыли дают лишь теоретически допустимые (предельные) для данного объединения уровни этих показателей и могут существенно отличаться от текущих значений. Для нормативной функции прибыли это различие тем выше, чем ближе к единице степень однородности производственной функции.

3.3. Модель прогнозирования основных показателей деятельности объединения на основе производственной функции

Производственные функции широко применяются также в составе более сложных моделей экономической динамики в сочетании с моделями воспроизводства средств и предметов труда, моделями научно-технического прогресса и качества продукции, а также с производственными функциями смежных систем. Применение производственных функций в стандартных моделях экономического роста можно найти в [10]; одна из первых моделей развития социалистической экономики на основе производственной функции предложена в [29] (см. также [10]). Производственные функции в моделях сложных систем исследовались в [53], в составе моделей межотраслевого баланса — в [26].

Приводимая ниже модель формирования основных показателей деятельности производственного (промышленного) объединения служит примером модели, описывающей не только соотношение между затратами ресурсов и результатами производства в данном году, но и процесс расширенного воспроизводства этих ресурсов в предшествующие и последующие годы. Эту модель можно рассматривать как разновидность модели формирования области определения M_t производственной функции для каждого года t моделируемого периода. Подробная характеристика принципов моделирования, использованных при разработке модели, изложена в [14]. Версия модели, приводимая ниже, отличается от [14] прежде всего учетом особенностей современного хозяйственного механизма, а также отражением ряда обратных связей, не моделировавшихся ранее.

Модель состоит из экономико-статистических, нормативных и балансовых соотношений между основными показателями деятельности объединения: объем товарной продукции (ТОВ), нормативной чистой продукции (НЧП) и реализованной продукции (РП), доля продукции высшей категории качества (ДВ), балансовая прибыль (ПРИБ), себестоимость продукции (СЕБ), материальные затраты (МАТ), амортизационные отчисления (АМ), в том числе отчисления на полное восстановление основных фондов (ВОС) и капитальный ремонт (КР), ассигнования из бюджета (АБ), платежи в бюджет (ПБ), основные производственные фонды (ОФ), оборотные средства (ОС), отчисления в единый фонд развития науки и техники (ЕФРНТ) и резервный фонд (РЕЗ), размеры фондов экономического стимулирования (ФЭС), капитальных вложений (КАП), в том числе на новое строительство и расширение (СТР), ввод в действие (ВВОД) и выбытие (ВЫБ) основных фондов, численность работающих (Л).

В модели описываются процессы производства и реализации продукции, формирования и распределения прибыли, финансирования и освоения капитальных вложений, прироста оборотных средств объединения. Единицей измерения времени t является год.

Экономико-статистические соотношения используются для моделирования зависимостей между показателями, являющимися выходами и входами сложных производственно-финансовых процессов. В определенном смысле все экономико-статистические соотношения модели суть производственные функции различных экономических процессов. К числу таких процессов, кроме процесса переработки сырья и материалов в продукцию, в данном случае относятся:

формирование издержек производства; реализация готовой продукции; динамика показателя качества выпускаемой продукции; ввод и выбытие основных фондов.

В качестве производственной функции в модели используются трехфакторная производственная функция

$$ТОВ_t = f(ОФ_t,\ ОС_t,\ Л_t) \qquad (3.17)$$

и двухфакторная производственная функция*

$$НЧП_t = \bar{f}(ОФ_t,\ Л_t). \qquad (3.18)$$

Обе эти функции моделируют один и тот же производственный процесс, однако в первой результат измеряется с помощью показателя товарной продукции, во второй — с помощью показателя объема нормативной чистой продукции.

Вид функций $f, \bar{f}$ выбирается в соответствии с изложенным в п. 2.2. Если в качестве производственных функций берутся функции Кобба — Дугласа, то дополнительно вводятся ограничения на область определения функций

$$(ОФ_t,\ ОС_t,\ Л_t) \in M, \qquad (3.19)$$

где M — область допустимых изменений показателей $ОФ$, $ОС$, $Л$. Вид (конфигурация) области определения выбирается в соответствии с рекомендациями п. 2.3. В [14] в качестве области определения использовался прямоугольный конус

$$M = \left\{(ОФ,\ ОС,\ Л) \mid a_1 < \frac{ОС}{ОФ} < b_1,\ a_2 < \frac{Л}{ОФ} < b_2\right\}, \qquad (3.20)$$

где a_1, a_2, b_1, b_2 — оцениваемые параметры.

Для описания процесса формирования издержек производства существуют два пути.

Можно использовать нормативные функции удельных затрат или прибыли, строящиеся без дополнительной статистической информации на основе производственной функции:

$$СЕБ_t = ТОВ_t g(c_{1t},\ c_{2t},\ c_{3t}), \qquad (3.21)$$

если степень однородности производственной функции равна 1,

$$СЕБ_t = ТОВ_t - p(c_{1t},\ c_{2t},\ c_{3t}), \qquad (3.22)$$

если степень однородности производственной функции меньше 1 (здесь c_{1t} — норма амортизационных отчислений, c_{2t} — отношение материальных затрат к общей сумме оборотных средств, c_{3t} — средняя заработная плата одного

* Индекс t у показателя означает, что рассматривается его значение в год t.

работающего). Уравнения (3.21) и (3.22) показывают, однако, не фактические, а минимально допустимые издержки производства.

Более реалистическая картина получается, если для определения издержек использовать формулу

$$СЕБ_t = c_1ОФ_t + c_2ОС_t + c_3Л_t, \qquad (3.23)$$

рассматривая коэффициенты c_1, c_2, c_3 как статистические и подлежащие оцениванию.

Выбор между двумя методами моделирования себестоимости определяется целью построения модели. Если модель предназначена для определения нормативных значений показателей (оптимистический вариант прогноза), целесообразно использовать уравнения (3.21) и (3.22). Если же речь идет о дескриптивном прогнозе, в наибольшей степени учитывающем сложившиеся тенденции, рекомендуется применять соотношение (3.23).

При моделировании процесса реализации продукции предполагается, что объем реализованной продукции зависит от объема и качества произведенной товарной продукции. Если доля продукции высшей категории качества превышает определенную величину, то продукция реализуется полностью. Чем меньше доля продукции высшей категории качества, тем ближе к нулю отношение реализованной продукции к товарной. Такой процесс может быть описан уравнением

$$РП_t = ТОВ_t \left(\frac{ДВ_t + \theta_1}{1 + \theta_1} \right)^{\theta_2}, \qquad (3.24)$$

где θ_1, θ_2 — коэффициенты, подлежащие статистическому или экспертному оцениванию.

В свою очередь, одним из существенных факторов, влияющих на качество выпускаемой продукции, ее конкурентоспособность на внутреннем и мировом рынках, является уровень развития научных исследований в объединении. В первом приближении он может быть измерен с помощью показателя затрат на финансирование НИР и ОКР. Чем выше темп роста затрат на научные исследования и конструкторские разработки, тем ближе к единице доля продукции высшей категории качества. При минимальном темпе роста E_t, равном —1, $ДВ_t$ близка к нулю. Зависимость $ДВ_t$ от темпа роста вложений в науку $E'_t = \frac{E_t - E_{t-1}}{E_{t-1}}$ можно приближенно представить формулой

$$ДВ_t = \frac{E'_t + \theta_3}{E'_t + \theta_4}, \qquad (3.25)$$

где θ_3, $\theta_4 > 0$ — параметры, подлежащие статистическому или экспертному оцениванию.

Следующее соотношение моделирует процесс освоения капитальных вложений и ввода в действие основных фондов. В общем виде зависимость между объемом ввода и капитальными вложениями выражается как

$$ВВОД_t = v(СТР_t, СТР_{t-1}, СТР_{t-2}, \ldots). \qquad (3.26)$$

В качестве аргументов функции v используются объемы капитальных вложений года t и предшествующих лет. Число аргументов в каждом конкретном случае различно и определяется сроком строительства. При построении функции v допустимы следующие возможности:

а) функция v строится на основе обработки статистических данных о вводе основных фондов и капитальных вложений за прошедший период. В этом случае она имеет вид

$$ВВОД_t = v_0 СТР_t + v_1 СТР_{t-1} + v_2 СТР_{t-2} + \ldots, \qquad (3.27)$$

где $v_0, v_1, v_2, \ldots$ — числовые коэффициенты, показывающие, какая часть капитальных вложений предшествующего года входит в стоимость основных фондов, введенных в году t. Для определения этих коэффициентов используются специальные методы регрессионного анализа или экспертные оценки;

б) функция v строится на основе предварительно разработанных вариантов нового строительства в объединении на перспективу. Каждый из таких вариантов характеризуется стоимостью ввода основных фондов и объемом капитальных вложений за каждый год пятилетки.

В зависимости от того, каковы лимиты ежегодных капитальных вложений, выделяемых данному объединению, и каковы возможности объединения по их финансированию, выбирается тот или иной вариант. При этом ввод основных фондов в году t равен максимальному вводу из всех вариантов, полностью финансируемых объединением в данный и предшествующие годы.

Обозначим через k номер варианта и через $ВВОД_1^k$, $ВВОД_2^k$, ..., $ВВОД_5^k$, $СТР_1^k$, ..., $СТР_5^k$ — вводы основных фондов и капитальные вложения по этому варианту за каждый год планируемой пятилетки. Тогда функция v будет иметь следующий вид:

$$ВВОД_t = \max_{\{k\}} (ВВОД_t^k), \qquad (3.28)$$

где максимум берется по всем номерам вариантов, удовлетворяющих условиям $CTP_t^k \leqslant CTP_t$, $CTP_{t-1}^k \leqslant CTP_{t-1}$, ...

Выбор между двумя описанными способами моделирования процесса освоения капитальных вложений определяется тем, на каком этапе планирования используется модель. Если варианты нового строительства не проработаны, используется статистическое уравнение (3.27). На более поздних этапах рекомендуется вариантное соотношение (3.28).

Выбытие основных производственных фондов в год t считается пропорциональным стоимости фондов предшествующего:

$$ВЫБ_t = M_t ОФ_{t-1}. \qquad (3.29)$$

Экономико-статистические соотношения (3.17)—(3.29) дополняются двумя группами уравнений — нормативными и балансовыми. Нормативные соотношения (3.30)—(3.43) отражают функционирование хозяйственного механизма с помощью системы плановых нормативов. Эти нормативы устанавливаются вышестоящими плановыми органами и определяют размеры отчислений в различные финансовые фонды объединения или вышестоящих организаций. Приводимые ниже уравнения в основном соответствуют варианту хозяйственного механизма, реализованному при проведении широкомасштабного экономического эксперимента в промышленности согласно постановлению ЦК КПСС и Совета Министров СССР «О дополнительных мерах по расширению прав производственных объединений (предприятий) промышленности в планировании и хозяйственной деятельности и по усилению их ответственности за результаты работы». Они могут быть легко изменены в соответствии с другим принятым или исследуемым вариантом хозяйственного механизма.

Отчисления в единый фонд развития науки и техники

$$ЕФРНТ_t = \varepsilon ТОВ_t; \qquad (3.30)$$

на амортизацию основных фондов

$$АМ_t = \beta ОФ_t; \qquad (3.31)$$

на восстановление основных фондов

$$ВОС_t = \omega АМ_t; \qquad (3.32)$$

в резервный фонд объединения

$$РЕЗ_t = \psi ОС_t; \qquad (3.33)$$

в фонд материального поощрения

$$ФМП_t = ФМП_{t-1}\left(1 - \rho_1\left(\frac{СЕБ_t}{ТОВ_t} \Big/ \frac{СЕБ_{t-1}}{ТОВ_{t-1}} - 1\right) + \rho_2 ДВ_t\right); \quad (3.34)$$

в фонд социально-культурных мероприятий и жилищного строительства

$$ФСКМЖС_t = ФСКМЖС_{t-1}\left(1 + \rho_3 \frac{НЧП_t}{Л_t} \Big/ \frac{НЧП_{t-1}}{Л_{t-1}} - 1\right) - \rho_4\left(\frac{МАТ_t}{ТОВ_t} \Big/ \frac{МАТ_{t-1}}{ТОВ_{t-1}} - 1\right)\Bigg); \quad (3.35)$$

в фонд развития производства из прибыли

$$ФП_t = ФП_{t-1}\left(1 + \rho_5\left(\frac{ПРИБ_t}{ПРИБ_{t-1}} - 1\right)\right); \quad (3.36)$$

в фонд развития производства из сумм, предназначенных на восстановление основных фондов

$$ФВ_t = ФВ_{t-1}\left(1 + \rho_6\left(\frac{ВОС_t}{ВОС_{t-1}} - 1\right)\right). \quad (3.37)$$

Формирование фонда заработной платы описывается соотношением

$$ФЗП_t = ФЗП_{t-1}\left(1 + \rho_7\left(\frac{НЧП_t}{НЧП_{t-1}} - 1\right)\right). \quad (3.38)$$

Величина капитальных вложений в новое строительство и расширение определяется через норматив к общей сумме капитальных вложений: $СТР_t = \lambda КАП_t$.

В соотношениях (3.30) — (3.38) ε, β, ω, ψ, ρ_1, ..., ρ_7, λ— нормативы, которые могут дифференцироваться по годам прогнозного (планового) периода.

Балансовые соотношения модели включают:

обобщенный баланс доходов и расходов объединения

$$АМ_t + ПРИБ_t + ФРП_t + АБ_t = ПБ_t + КАП_t + \Delta ОС_t + ЕФРНТ_t + ФМП_t + ФСКМЖС_t + ФРП_t + РЕЗ_t + КР_t, \quad (3.39)$$

где $\Delta(ОС)_t = ОС_{t+1} - ОС_t$ — прирост оборотных средств года;

баланс распределения амортизационных отчислений

$$A_t = ВОС_t + КР_t; \quad (3.40)$$

баланс распределения капитальных вложений на новое строительство и реконструкцию

$$КВ_t = СТР_t + РЕК_t; \quad (3.41)$$

баланс фонда развития производства

$$ФРП_t = ФП_t + ФВ_t; \quad (3.42)$$

годовые балансы основных производственных фондов и оборотных средств:

$$ОФ_{t+1} = ОФ_t + ВВОД_t + РЕК_t - ВЫБ_t; \quad (3.43)$$

$$ОС_{t+1} = ОС_t + \Delta(ОС)_t; \quad (3.44)$$

баланс издержек производства

$$СЕБ_t = МАТ_t + ФЗП_t + АМ_t; \quad (3.45)$$

образование прибыли

$$ПРИБ_t = РП_t - СЕБ_t. \quad (3.46)$$

Использование данной модели для прогнозирования производится следующим образом. В стандартном варианте использования модели для прогнозирования предполагается, что экзогенными являются: а) все нормативные и статистические коэффициенты модели; б) баланс доходов и расходов, основные фонды, объем нормативной чистой продукции предпланового года; в) капитальные вложения в новое строительство за ряд лет, предшествующих плановому периоду; г) лимит численности ППП, ассигнования из государственного бюджета и отчисления в бюджет, лимит государственных капитальных вложений. При таком подходе соотношения модели допускают перегруппировку и преобразования, превращающие их совокупность в систему рекуррентных уравнений; значения показателей года $t + 1$ выражаются с их помощью через значения показателей года t и предшествующих лет.

Глава 4

ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ В СИСТЕМЕ ПЛАНОВО-АНАЛИТИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ

●

4.1. ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ В ПЕРСПЕКТИВНОМ ПЛАНИРОВАНИИ

4.1.1. Производственные функции как многофакторные плановые нормативы

Одной из актуальных задач перспективного планирования на всех уровнях управления является обеспечение сбалансированности разрабатываемых планов. Сбалансированность планов — необходимое условие развития хозяйственной системы, планомерности ее роста в пределах и за пределами планового горизонта. Наряду с напряженностью степень сбалансированности плана служит важной характеристикой его качества.

На уровне годового планирования основную роль в процессе достижения сбалансированности составляемых планов играет система норм и нормативов. Нормативы затрат живого труда, предметов и средств труда позволяют рассчитать плановые балансы продукции, основных фондов, трудовых, материальных и финансовых ресурсов [15]. Достаточно широкая система нормативов, определяющих соотношения между парами показателей, дает возможность увязать всю систему показателей деятельности объединения, отрасли. Планирование на основе нормативной базы по существу является реализацией балансового метода планирования на уровне объединения.

Для перспективного планирования сфера применения понятия норматива как соотношения между двумя показателями (или значениями одного и того же показателя для различных моментов времени) сужается. Одна из основных причин этого — неопределенность будущего развития. Высокие темпы научно-технического прогресса, рост специализации и кооперации производственных объединений, ускорение процессов морального износа продуктов труда приводят к быстрой смене номенклатуры и ассортимента выпускаемой продукции. В наибольшей степени это относится к отраслям промышленности, находящимся «на острие» научно-технического прогресса, — приборостроению, радио-

промышленности и др. Несколько медленнее, но все же достаточно высокими темпами происходит замена одних конструкционных материалов другими, модернизация оборудования и т. п. Поэтому методы составления перспективных планов не могут базироваться на подробных номенклатурных перечнях изделий, составляемых в начале планируемого периода. Обычно формируются номенклатурные группы, происходит замена натуральных показателей выпуска продукции стоимостными. Одновременно в группы оборудования, сырья и материалов агрегируются и ресурсы. Соответственно возрастает нагрузка и на нормативы, выражающие связь между затратами ресурсов и выпуском. Это проявляется, во-первых, в том, что линейный характер связи между затратами ресурса каждого из видов и выпуском изделий данного вида, имеющий место для детальных перечней видов, теряется, и связи становятся нелинейными. Так, количество материалов определенного вида, необходимых для производства одного изделия в перспективном периоде, существенно зависит от того, каков годовой объем выпуска данного изделия. Во-вторых, стабильность детальных нормативов расхода по существу определяется стабильностью технологии и стандартов производственного процесса. Агрегированные же однофакторные нормативы более чувствительны к экономическим изменениям в условиях производства. Чем выше степень агрегирования, тем сильнее влияют на нормы и нормативы показатели, не участвующие непосредственно в формировании данного норматива.

Рассмотрим следующую ситуацию. Пусть при производстве продукции определенного вида в количестве y используются n видов ресурсов $x_1, \ldots, x_n$. Для плановой увязки показателя выпуска y с показателями ресурсов $x_1, \ldots, x_n$ используются нормативы $a_1, \ldots, a_n$, выражающие нормы расхода ресурса каждого вида на производство единицы продукции. Соотношения между показателем y и показателями $x_1, \ldots, x_n$ имеют вид $a_1 y \leqslant x_1, \ldots, a_n y \leqslant x_n$. Величина $z_i = a_i y$ выражает количество ресурса i, необходимое для производства продукции в количестве y. Из этих соотношений вытекает, что $y \leqslant x_i/a_i$, $i = 1, \ldots, n$. В предположении, что производится максимальное количество продукции, возможное при данных ресурсах, получаем зависимость

$$y = \min(x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n).$$

Здесь через нормативы выражается балансовое соотношение между показателями производственных ресурсов и выпуска. Если же учесть, что количество ресурсов, необхо-

димое для производства продукции, не обязательно пропорционально количеству ресурсов для единицы выпуска, то i-я функция затрат $z_i = a_i y$ перестает быть линейной, а нормативы $a_1, \ldots, a_n$ из числовых превращаются в функциональные: $z_i = a_i(y)$. Кроме того, на уровень норматива затрат $a_i y$ может влиять также уровень обеспечения другими ресурсами $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$: в условиях дефицита i-го ресурса норматив может быть меньше, чем в условиях его избытка. Поэтому в общем случае z_i зависит от всех участвующих в рассмотрении показателей: $z_i = a_i(x_1, \ldots, x_n)$. Соответствующее соотношение между выпуском y и ресурсами $x_1, \ldots, x_n$ примет вид общей производственной функции $y = f(x_1, \ldots, x_n)$.

В процессе агрегирования показателей число аргументов производственной функции уменьшается. Чем дальше отодвигается горизонт планирования, тем более крупными становятся группы ресурсов и видов продукции. При 15—20-летнем планировании в производственном объединении одним из основных плановых показателей результатов производства становится объем выпуска. Таким образом, производственная функция в перспективном планировании используется как модель соотношения между затратами ресурсов и объемами выпуска, учитывающая нелинейность, взаимозависимость и взаимозаменяемость затрат. Производственная функция представляет собой естественное обобщение системы однофакторных нормативов затрат ресурсов и играет в перспективном планировании ту же роль, что и указанные нормативы в текущем планировании, являясь инструментом формирования и анализа плановых вариантов.

В каждом из нормативов (а также в нормах и нормативных соотношениях), предназначенных для использования в перспективном планировании, должны отражаться, с одной стороны, сложившиеся в прошлом соотношения между соответствующими показателями, с другой — нормы и направления будущего развития объекта планирования. Таким образом, нормативы сочетают в себе «дескриптивные» (описательные) и «нормативные» (предписательные) функции, пропорции между которыми определяют соответственно реальность и прогрессивность норматива. Поэтому использование производственной функции в качестве норматива возможно только тогда, когда при ее построении была учтена как ретроспективная статистическая и другая информация, так и перспективная, отражающая желательный ход развития системы. Для этого в состав информационной базы построения ПФ могут включаться, например, желательные значения объема выпуска продукции при заданных

объемах ресурсов или, скажем, предельные величины производительности труда, фондоотдачи и т. д. При использовании в качестве планового норматива производственная функция, построенная с учетом этих данных, будет стимулировать принятие напряженных и сбалансированных планов.

4.1.2. Использование производственных функций при разработке разделов пятилетнего плана

Структура и состав показателей перспективных планов зависят от уровня и горизонта планирования. Наиболее стабильной на сегодняшний день является структура пятилетнего плана производственного объединения, предприятия (комбината), описанная в [62]. Эта структура в основном сохраняется в большинстве отраслей промышленности. Поэтому краткий обзор способов использования производственных функций в процессе составления, обоснования и утверждения перспективного плана мы будем вести применительно к составу пятилетнего плана объединения. Аналогичные плановые задачи с применением производственных функций могут решаться и при 10—15-летнем горизонте планирования на уровне подотрасли, отрасли, региона.

Возможность применения производственных функций при разработке различных разделов плана связана с двумя обстоятельствами. Во-первых, показатели аргументов и значений производственной функции относятся к различным разделам плана и, следовательно, производственная функция является «межраздельным» объектом. Во-вторых, на основе производственной функции формируется ряд производственных зависимостей, включающих в себя большое число показателей, относящихся к различным разделам плана. Многие из производных зависимостей рассмотрены в гл. 1 при изучении характеристик производственной функции.

Производственные функции используются при разработке следующих разделов плана объединения: а) планирование производства и реализации продукции; б) планирование повышения экономической эффективности производства; в) план капитального строительства; г) план по труду и кадрам; д) план себестоимости и прибыли; е) финансовый план.

В разделе «Планирование производства продукции в стоимостном выражении» методикой разработки пятилетнего плана на уровне объединения [59] рекомендуется проводить обоснование (а в случае многономенклатурного произ-

водства — и расчет) планируемого объема продукции на основе динамики основных фондов (фондоотдачи). На самом деле для более полного обоснования здесь должны использоваться зависимости объема выпуска не только от стоимости основных фондов, но и от численности ППП, а если речь идет о товарной или валовой продукции — и от размера оборотных средств. Построение производственной функции, моделирующей эти зависимости, позволяет определить ориентировочный объем выпуска в стоимостном выражении до его планирования в натуральном измерении.

Одной из основных задач раздела «Планирование повышения экономической эффективности производства» является улучшение использования трудовых, материальных и финансовых ресурсов объединения. В качестве показателей их эффективности обычно используются фондоотдача, производительность труда (исчисляемая как средняя выработка на одного работника промышленно-производственного персонала) и оборачиваемость оборотных средств. Если известна производственная функция $y = f(x_1, x_2, x_3)$, где y — объем выпуска товарной продукции, x_1 — основные фонды, x_2 — оборотные средства, x_3 — численность ППП объединения, причем f — однородная функция первой степени, то, разделив ее на величину y, получим, что $f\left(\frac{x_1}{y}, \frac{x_2}{y}, \frac{x_3}{y}\right) = 1$. Следовательно, в этом случае показатели фондоотдачи $\frac{y}{x_1}$, оборачиваемости оборотных средств $\frac{y}{x_2}$ и производительности труда $\frac{y}{x_3}$ связаны между собой статистическим соотношением и любые два из них определяют третий. Таким образом, планирование показателей повышения эффективности использования средств, предметов и живого труда будет сбалансированным в том случае, когда учитывается связь между этими показателями, вытекающая из производственной функции.

Раздел «Разработка плана капитального строительства» включает в себя планирование ввода в действие основных производственных фондов. Основой для определения ввода основных фондов является задание по производству продукции. Показатели фондоотдачи, определяемые исключительно по предплановому периоду, не дают возможности однозначно определить потребность в основных фондах под заданный прирост продукции. Наиболее точный результат и здесь дает применение плановой многофакторной производственной функции. Подставляя в качестве y заданное значение объема выпуска, в качестве x_2 и x_3 — значения пока-

зателей ресурсов, можно определить размер основных фондов, обеспечивающий в этих условиях производство в данном объеме: $x_1 = h_1(y, x_2, x_3)$, где h_1 — функция, неявно заданная соотношением $f(h_1(y, x_2, x_3), x_2, x_3) = y$ и выражающаяся через производственную функцию. Теперь размер ввода основных фондов за период $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, необходимый для достижения запланированного объема выпуска при заданных $x_2(t)$ и $x_3(t)$, составит: $ВВОД = h_1(y(t_1), x_2(t_1), x_3(t_1)) - h_1(y(t_0), x_2(t_0), x_3(t_0)) - ВЫБ$, где $ВЫБ$ — выбытие основных фондов за период $[t_0, t_1]$.

Аналогичные задачи решаются и при составлении плана по труду и кадрам. Потребность в рабочей силе определяется на основе намеченного роста объема продукции с учетом роста основных фондов и обеспеченности производства оборотными средствами. С помощью производственной функции $y = f(x_1, x_2, x_3)$ находится функция потребности в рабочей силе $x_2 = h_2(y, x_1, x_3)$, выражающая численность работающих через объем выпуска и остальных производственных ресурсов и удовлетворяющая тождественному соотношению $f(x_1, h_2(y, x_2, x_3)) = y$.

Рассмотрим теперь применение производственной функции в планировании себестоимости, прибыли и рентабельности производства. Целью планирования себестоимости является экономически обоснованное определение величины затрат, необходимых для изготовления предусмотренной планом продукции. Базой определения себестоимости служит динамика затрат на 1 руб. товарной продукции. Планирование затрат на 1 руб. товарной продукции основано на динамике факторов, влияющих на этот показатель. Этот процесс, как показано в п. 3.2.2, моделируется с помощью нормативной функции удельных затрат $g(c)$ или функции прибыли $p(c)$, которые строятся на основе производственной функции. Если степень однородности производственной функции объединения равна единице, то с ее помощью строится функция удельных затрат, определяющая минимальный уровень норматива затрат на 1 руб. товарной или нормативной чистой продукции. Если же степень однородности производственной функции меньше единицы, то для планирования себестоимости целесообразно строить не функцию удельных затрат $g(c)$, а функцию прибыли $p(c)$ (см. п. 3.2.2). Эта функция также может использоваться и для планирования удельных затрат.

Одной из основных задач раздела «Разработка финансового плана» является «обеспечение взаимоувязки разделов плана с финансовыми ресурсами объединения, а также определение его финансовых взаимоотношений с вышестоящими

хозяйственными органами, государственным бюджетом и банками» [59]. Для решения этой задачи на уровне разработки концепции финансового плана может быть использована модель взаимосвязи показателей деятельности объединения, описанная в § 3.3. С точки зрения финансового планирования она представляет собой расширенный вариант баланса доходов и расходов объединения, дополненный «вертикальным» балансом связей по годам планового периода. С помощью этой модели, основанной на производственной функции, могут решаться следующие плановые задачи:

1) определение основных показателей деятельности объединения (объем товарной или нормативной чистой продукции, прибыль, основные фонды, оборотные средства и др.) на каждый год пятилетки, в зависимости от установленных лимитов численности рабочих и служащих, капитальных вложений и размера отчислений от прибыли в бюджет с разбивкой по годам;

2) определение максимального размера отчислений от прибыли в бюджет при условии обеспечения заданных темпов роста объема выпуска продукции и заданных лимитов численности рабочих и служащих и капитальных вложений;

3) определение наилучшей структуры распределения прибыли, остающейся в распоряжении объединения, на финансирование капитальных вложений и прирост норматива собственных оборотных средств;

4) определение наилучшей структуры распределения по годам общего лимита капитальных вложений на пятилетку.

Составление пятилетнего плана объединений проходит в несколько этапов. Сначала разрабатывается проект контрольных цифр (основных направлений) пятилетнего плана, представляющий собой один из вариантов обобщенной концепции плана. Затем проектируемые значения основных показателей развития объединения проходят ряд согласований и утверждений вышестоящими органами, после чего направляются в объединения в качестве контрольных цифр. Наконец, на основании этих цифр разрабатывается детальный проект плана по всем разделам и показателям на пятилетний период. После многократных итерационных процедур согласования он утверждается в качестве основной формы плана развития объединения. Применение производственных функций и связанных с нею зависимостей оказывается наиболее эффективным, во-первых, на начальном этапе планирования, т. е. при формировании проекта контрольных цифр [7], и, во-вторых, на одной из заключительных стадий, для анализа вариантов плана, направляе-

мых в объединение вышестоящими планирующими органами. Значительное расхождение между предложенным вариантом плана и производственной функцией может свидетельствовать о несбалансированности плана на уровне основных показателей.

4.2. ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ В ЭКОНОМИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ ХОЗЯЙСТВЕННОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

4.2.1. Использование производственных функций в комплексном анализе хозяйственной деятельности

Одной из основных задач экономического анализа является качественное и количественное исследование влияния факторов на обобщающие экономические показатели [72]. Эта задача решается в несколько этапов: 1) формирование факторной системы, т. е. множества показателей, оказывавших наиболее существенное влияние на обобщающий показатель в анализируемом периоде; 2) построение математической модели зависимости уровня обобщающего показателя от уровней показателей-факторов; 3) количественная оценка влияния каждого из факторов или их группы на изменение обобщающего показателя. Наиболее простым при этом является случай, когда обобщающий показатель выражается через факторы с помощью детерминированной (точной) функциональной зависимости. Например, если y — обобщающий показатель производительности труда, а факторную систему составляют показатели фондовооруженности (x_1) и фондоотдачи (x_2), то зависимость между ними выражается соотношением $y = x_1x_2$. Однако функциональное факторное разложение при заданных y, x_1, ..., x_n существует далеко не всегда (методы обнаружения и идентификации таких зависимостей изложены в [33]). В большинстве случаев приходится строить статистические модели, приближенно выражающие факторную зависимость на определенном промежутке времени. Производственная функция $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ по существу и представляет собой факторное разложение одного из обобщающих показателей — объема выпуска продукции. Построение этой функции дает возможность, следовательно, проводить анализ и оценку влияния факторов на динамику объема выпуска за определенный период.

Для оценки этого влияния сначала уточняется показатель, характеризующий итоговую динамику изменения y. Обычно в качестве такого показателя берется либо прирост за период $\Delta y = y(t_{кон}) - y(t_{нач})$, либо индекс роста

$\mathrm{ind}y = \frac{y(t_{\text{кон}})}{y(t_{\text{нач}})}$, либо темп роста $\tau y = \frac{y(t_{\text{кон}}) - y(t_{\text{нач}})}{y(t_{\text{нач}})}$.

В зависимости от этого выбора меняется и понятие «вклада» i-го фактора в итог изменения y.

Можно показать, что при естественных предпосылках «вклад» A_i каждого i-го фактора в прирост Δy следует искать в виде аддитивных слагаемых Δy, в сумме дающих величину Δy. Соответственно вклады B_i i-го фактора в индекс $\mathrm{ind}y$ следует считать сомножителями $\mathrm{ind}y$, произведение которых равно $\mathrm{ind}y$. Вклады C_i i-го фактора в темп роста $\tau(y)$ связаны с $\tau(y)$ формулой $\tau(y) = (C_1 + 1)\ldots(C_n + 1) - 1$.

Доказано ([16], [32]), что если $y = f(x_1, \ldots, x_n)$, причем заданы траектории изменения каждого фактора $x_i(t)$, а сами факторы независимы, то

$$A_i = \int_{t_{\text{нач}}}^{t_{\text{кон}}} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t, \quad B_i = \exp \int_{t_{\text{нач}}}^{t_{\text{кон}}} \frac{\partial \ln f}{\partial x_i} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t,$$

$$C_i = \exp \int_{t_{\text{нач}}}^{t_{\text{кон}}} \frac{\partial \ln f}{\partial x_i} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t - 1. \tag{4.1}$$

В частности, если $y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$, а траектории изменения факторов в промежутке $t_{\text{нач}} \leqslant t \leqslant t_{\text{кон}}$ могут быть представлены в виде степенных функций $x_1(t) = b_1 t^{\alpha_1}$, $x_2(t) = b_2 t^{\alpha_2}$, то

$$A_1 = \frac{a_0 a_1 \alpha_1 b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2} \left(t_{\text{кон}}^{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2} - t_{\text{нач}}^{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2}\right);$$

$$A_2 = \frac{a_0 a_2 \alpha_2 b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2} \left(t_{\text{кон}}^{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2} - t_{\text{нач}}^{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2}\right);$$

$$B_1 = \left(\frac{t_{\text{кон}}}{t_{\text{нач}}}\right)^{\alpha_1 a_1}; \quad B_2 = \left(\frac{t_{\text{кон}}}{t_{\text{нач}}}\right)^{\alpha_2 a_2};$$

$$C_1 = \frac{t_{\text{кон}}^{\alpha_1 a_1} - t_{\text{нач}}^{\alpha_1 a_1}}{t_{\text{нач}}^{\alpha_1 a_1}}; \quad C_2 = \frac{t_{\text{кон}}^{\alpha_2 a_2} - t_{\text{нач}}^{\alpha_2 a_2}}{t_{\text{нач}}^{\alpha_2 a_2}}.$$

Выражение

$$\Delta y = A_1 + \ldots + A_n = \int_{t_{\text{нач}}}^{t_{\text{кон}}} \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t + \ldots +$$

$$+ \int_{t_{\text{нач}}}^{t_{\text{кон}}} \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t \tag{4.2}$$

для вклада i-го фактора в прирост результирующего показателя называется *интегральным разложением прироста*.

Для вычисления компонент A_i, B_i, C_i интегрального разложения прироста, индекса и темпа роста показателя $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ по формулам (4.1) необходимо знать частные производные функции f и производные функции $x_i(t)$ на отрезке $[t_0, t_1]$. Кроме того, необходим метод определения величины определенного интеграла.

Однако в реальной экономической практике бывают известны не все компоненты исходной информации для вычислений. В первую очередь это относится к производным функциям, выражающим изменение факторов $x_i(t)$. Практически, как отмечалось выше, измерения значений факторов x_i производятся через определенные промежутки времени. Поэтому вместо функций $x_i(t)$, заданных при всех t, заключенных между $t_{нач}$ и $t_{кон}$, в нашем распоряжении имеются лишь дискретные наборы значений этих функций, относящихся к моментам $t^1 = t_{нач}, t^2, \ldots, t^k = t_{кон}$.

Как правило, моменты разделены одинаковыми промежутками времени.

Вычисление интегралов также лишь в немногих случаях можно выполнить аналитически. Следовательно, в большинстве ситуаций необходимо пользоваться численными методами, представляющими интеграл в виде явного выражения от конечного числа значений подынтегральной функции.

Оценка вклада i-го фактора в прирост результирующего показателя по формуле (4.1) для A_i дает точное разложение величины $\Delta y_{выч} = \Delta f(x_1, \ldots, x_n)$. Поскольку производственная функция служит лишь приближенным описанием процесса, прирост функции $f(x(t_{кон})) - f(x(t_{нач}))$ и фактический прирост объема выпуска $y(t_{кон}) - y(t_{нач})$ за период $[t_{нач}, t_{кон}]$, как правило, не совпадают, поэтому в формулы (4.1) необходимо внести поправку. Мы рекомендуем следующее разложение фактического прироста показателя объема выпуска:

$$y(t_{кон}) - y(t_{нач}) = \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{y(t_{кон}) - y(t_{нач})}{f(x(t_{кон}) - f(x(t_{нач}))} .$$

Здесь разность между Δy и Δf делится пропорционально величинам $A_1, \ldots, A_n$. Аналогичным образом можно построить и скорректированные формулы для разложения индекса и темпа роста.

Аппроксимационный характер производственной функции проявляется также в том, что ее частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, входящие в формулу для вклада i-го фактора, не всегда близки к реальным предельным производительностям x_i. В п. 2.4 уже говорилось, что если при построении производственной функции использовался критерий оценки, предусматривающий сближение только вычисленных и фактических значений y, то характеристики первого и второго порядка построенной функции не обязательно должны отражать соответствующие характеристики производственного процесса. Поэтому для использования производственной функции при оценке вклада факторов в прирост, индекс или темп роста объема выпуска необходимо строить ее с обязательным учетом характеристик первого порядка. В связи с этим с известной осторожностью нужно подходить и к интерпретации параметров производственной функции. В ряде работ по производственным функциям можно встретить такую ситуацию: по статистическим данным построена производственная функция Кобба — Дугласа $y = a_0 \times \times x_1^{a_1} x_2^{a_2}$, параметры которой определялись методом наименьших квадратов, примененным к $\ln y$, $\ln x_1$, $\ln x_2$. Далее утверждается, что увеличение ресурса x_1 на один процент приводит к увеличению объема выпуска примерно на a_1 процентов. Но правомерна ли такая интерпретация? Ведь при аппроксимации мы стремились лишь к близости расчетных и фактических значений показателя y, в то время как параметр a_1 характеризует расчетную величину частной логарифмической производной этого показателя по первому аргументу. Само по себе сближение значений двух функций обычно не гарантирует сближение их частных производных, поэтому подобная интерпретация параметра a_1 в описанной ситуации обоснована недостаточно.

Рассмотрим теперь конкретные задачи комплексного экономического анализа хозяйственной деятельности, в которых целесообразно применение производственных функций.

1. Анализ использования трудовых ресурсов, средств и предметов труда. Обычно для исследования эффективности использования этих факторов производства привлекаются показатели производительности труда, фондоотдачи, оборачиваемости оборотных средств. Однако движение каждого из этих показателей само по себе не полностью характеризует интенсификацию использования ресурсов [68].

Рассмотрим следующий условный пример. Предположим, что за пятилетку производительность труда предприя-

тия (выработка на одного работающего) выросла в два раза. Можно ли утверждать, что трудовые ресурсы стали использоваться в два раза эффективнее? Если бы остальные ресурсы предприятия не изменились за это время, то да. Если же увеличение объема производства (в неизменных ценах и при неизменной в целом номенклатуре) произошло, например, за счет значительного увеличения основных фондов, то положительная динамика производительности труда будет сопровождаться падением фондоотдачи и не будет характеризовать интенсификацию использования трудовых ресурсов.

Для адекватного описания динамики производительности труда следовало бы в общем приросте объема выпуска выделить ту часть, которая непосредственно связана с приростом трудовых ресурсов. Отношение этой части прироста выпуска к приросту трудовых ресурсов и характеризует производительность дополнительно вовлеченных в производство трудовых ресурсов. Этот показатель допускает сравнение как с аналогичными показателями, относящимися к другим периодам, так и со средней выработкой одного работающего.

Аналогичным образом показатели, характеризующие динамику эффективности использования предметов труда, определяются как отношение доли прироста выпуска, обусловленной приростом стоимости вовлеченных в производство материалов, к величине этого прироста. Допустимо также использовать в качестве показателя объема предметов труда размер оборотных средств предприятия. В свою очередь, соответствующий динамический показатель фондоотдачи строится как отношение части прироста выпуска, обусловленной приростом основных фондов, к величине этого прироста.

Таким образом, в указанных случаях для построения динамической характеристики влияния факторов в течение периода необходимо получить пофакторное разложение прироста выпуска. Средством решения этой задачи является построение производственной функции и определение на ее основе вклада каждого из факторов в прирост объема выпуска продукции.

2. Анализ выпуска продукции. Одной из главных задач анализа выпуска продукции является оценка влияния производственных факторов на объем выпуска. Без применения производственной функции такой анализ для каждой группы факторов можно выполнить только в предположении неизменности наличных ресурсов других групп факторов [68],

что на практике выполняется очень редко. Получение пофакторного разложения прироста объема выпуска дает возможность решать эту задачу в общем случае.

3. Анализ динамики технологического уровня производства. Для отдельных, не слишком крупных предприятий технологические сдвиги являются следствием вполне определенных организационно-технических мероприятий и прослеживаются непосредственно. Существует целый ряд детализированных показателей, отражающих как уровень технологии, так и динамику. Для анализа технологии на уровне крупных производственных и промышленных объединений, отраслей, где состав, очередность и сроки выполнения мероприятий по совершенствованию технологии практически необозримы, о динамике технологии можно судить в основном лишь по соотношению агрегированных показателей производства. На этом уровне технология — способ переработки сырья и материалов в продукцию — отражается в коэффициентах в виде производственной функции, связывающей агрегированные ресурсные и выходные показатели производства.

Производственная функция в этом случае строится в динамическом варианте и явно зависит от времени. Относительно характера этой зависимости возможны два предположения. В первом случае предполагается, что смена одной технологии другой происходит дискретно. Это выражается в том, что зависимость производственной функции от времени является кусочно-постоянной. Для определения точек разрыва и высоты перепада уровней используются тонкие вероятностные методы, основанные на возможности выяснить, могут ли коэффициенты производственных функций, построенных по данным различных периодов, относиться к одной и той же генеральной совокупности [13]. Таким образом производится периодизация всего анализируемого промежутка времени, отражающая существенные сдвиги в технологии.

Альтернативная гипотеза основывается на непрерывной зависимости производственной функции от времени, выражающейся в росте эффективности ее факторов. Здесь возникают различные типы технического прогресса, в частности различные типы нейтрального прогресса [11]. В рамках этой гипотезы проблема разграничения эволюционных и революционных сдвигов в техническом уровне одного и того же объекта практически неразрешима, однако появляется возможность классификации объектов по характеру технологического дрейфа [80].

Важным направлением анализа экономической деятельности является исследование правильных пропорций между обобщенными факторами. Здесь возникают следующие вопросы: каковы нормальные для данной хозяйственной единицы соотношения между основными фондами и численностью, между основными фондами и материальными затратами, между основными фондами и оборотными средствами? Какова степень взаимозаменяемости между факторами и как она зависит от соотношений между ними?

Для ответа на первый вопрос могут быть использованы трехрежимные функции, описанные в п. 2.2.4. Оценка их параметров дает возможность указать область нормального соотношения между переменными. Отметим также следующую возможность применения двух- и многофакторных многорежимных функций. При анализе фактической эффективности использования ресурсов на основании непосредственных данных об уровне фондоотдачи и производительности труда, как уже упоминалось выше, трудно сделать выводы об оптимальном размере основных фондов и численности работающих на данном предприятии. Сравнение фондоотдачи и производительности труда с соответствующими показателями других предприятий или среднеотраслевым уровнем также не всегда правомерно ввиду специфики производства на каждом предприятии. В связи с этим предлагается определять эффективность использования этих ресурсов с помощью нормальной области. Действительно, если основные фонды используются неэффективно, то увеличение или относительно небольшое их уменьшение не должно существенно отразиться на объеме выпуска. То же самое можно сказать и об эффективности живого труда. Следовательно, область эффективного использования ресурсов не должна выходить за пределы нормальной области. Если мы определим теперь границы нормальной области, пользуясь методами, изложенными в п. 2.3.4 — 2.3.6, то тем самым будут определены и объективные границы эффективного использования ресурсов.

4. Анализ себестоимости и прибыли. Здесь в известных случаях могут быть применены нормативные функции удельных затрат и прибыли (см. п. 3.2.1, 3.2.2). С их помощью можно определить минимальный уровень затрат на 1 руб. товарной или нормативной чистой продукции или максимальный уровень прибыли. Кроме того, методы получения интегрального разложения прироста, индекса и темпа роста удельных затрат позволяют оценить вклад каждого из факторов в динамику этих показателей.

4.2.2. Использование производственных функций в сравнительном экономическом анализе

Поскольку производственная функция представляет собой наиболее обобщенную модель функционирования экономического объекта, ее можно использовать для сравнения эффективности работы различных объектов. Обычно сравнение работы двух предприятий за период базируется на попарном сопоставлении показателей производительности труда, фондоотдачи, оборачиваемости оборотных средств, материалоемкости. Показатель сравнительной экономии ресурса x на предприятии Б по сравнению с предприятием А за один и тот же период (или на одном и том же предприятии за разные периоды) вычисляется по формуле

$$Э_x = x_A \frac{y_Б}{y_A} - x_Б, \qquad (4.3)$$

где $x_A, x_Б$ — количества используемого ресурса на предприятиях А и Б; y_A, $y_Б$ — соответствующие объемы выпуска продукции [60]. Уменьшаемое в этой формуле показывает количество ресурса x, необходимое для производства продукции $y_Б$ на предприятии Б при условии, что ресурсоемкость производства такая же, как и на предприятии А. Вычитаемое выражает количество ресурса, необходимое для выпуска продукции $y_Б$ в условиях производства на предприятии Б. Если $Э > 0$, то эффективность использования ресурса x на предприятии Б выше, чем на предприятии А.

Формула (4.3) построена, как видим, на сравнении реальной ситуации на предприятии Б с условной ситуацией, когда «технология» предприятия А переносится на предприятие Б. Понятие технологии при этом фактически сводится к ресурсоемкости. Формула (4.3) может быть получена из факторного разложения величины $x_A - x_Б$ в сумму двух слагаемых:

$$x_A - x_Б = \left(x_A \frac{y_Б}{y_A} - x_Б \right) + \left(x_A - x_A \frac{y_Б}{y_A} \right), \qquad (4.4)$$

первое из которых выражает вклад в $x_A - x_Б$ изменения ресурсоемкости продукции, второе — вклад изменения объема выпуска. Здесь используется тождество $x = y \cdot \frac{x}{y}$ и предполагается следующая условная последовательность перехода от ситуации предприятия А к ситуации предприятия Б: сначала ресурсоемкость при постоянном выпуске изменяется от $\frac{x_Б}{y_Б}$ до $\frac{x_A}{y_A}$, затем объем выпуска при постоянной ре-

сурсоемкости изменяется от $y_Б$ до $y_А$. Поскольку данные для обоснования последнего предположения, так же как и для обратной последовательности, обычно отсутствуют, интегральный метод рекомендует [68] вместо (4.3) более сбалансированную формулу для экономии ресурса x:

$$Э_x^{инт} = \frac{1}{2}\left(x_А \frac{y_Б}{y_А} - x_Б + x_А - \frac{y_А}{y_Б} x_Б\right). \qquad (4.5)$$

Эта формула, однако, также не может использоваться в большинстве случаев для сравнения эффективности работы двух предприятий, поскольку в ней фигурирует лишь один вид ресурсов. Часто бывает так, что, скажем, производительность труда выше на одном предприятии, а фондоотдача — на другом. В таких случаях необходим показатель совокупной эффективности использования основных производственных ресурсов.

Для получения такого показателя рассмотрим вместо факторного разложения прироста (экономии) ресурса $x_А$ — — $x_Б$ аналогичное разложение прироста объема производства $y_Б$ — $y_А$. Согласно интегральному методу [68] это разложение имеет вид

$$y_Б - y_А = \frac{1}{2}\left(x_А \frac{y_Б}{x_Б} - y_А + y_Б - x_Б \frac{y_А}{x_А}\right) + \\ + \frac{1}{2}\left(x_Б \frac{y_А}{x_А} - y_А + y_Б - x_А \frac{y_Б}{x_Б}\right), \qquad (4.6)$$

где первое слагаемое выражает вклад в $y_Б$ — $y_А$ изменения ресурсоотдачи. По сути дела, здесь суммируются результаты сравнения использования ресурсов $x_А$ в технологии предприятия Б и ресурсов $x_Б$ в технологии предприятия А. Технология здесь, как и в (4.3), (4.4), характеризуется показателем ресурсоотдачи. Именно выражение

$$Э = \frac{1}{2}\left(x_А \frac{y_Б}{x_Б} - y_А + y_Б - x_Б \frac{y_А}{x_А}\right) \qquad (4.7)$$

допускает обобщение на случай нескольких ресурсов производства. Пусть $x_{А,Б} = (x_1^{А,Б}, \ldots, x_n^{А,Б})$ — вектор ресурсов предприятий А и Б, $f_{А,Б}(x) = f_{А,Б}(x_1, \ldots, x_n)$ — их производственные функции с областями определения $M_А$ и $M_Б$, причем $x_А, x_Б \in M_А \cap M_Б$. Сравнительная эффективность совокупного использования ресурсов в этих условиях, как можно показать в рамках интегрального метода факторного анализа, оценивается по формуле

$$Эфф = \frac{1}{2}(f_Б(x_А) - y_А + y_Б - f_А(x_Б)). \qquad (4.8)$$

Таблица 4.1

Год	Товарная продукция	Основные фонды	Численность ППП	Фондоотдача	Производительность труда
1	4,9	2,3	1,2	2,13	4,08
2	5,4	2,5	1,3	2,16	4,15
3	6,1	3,0	1,4	2,03	4,36
4	6,2	3,1	1,4	2,00	4,43
5	6,9	3,4	1,6	2,02	4,31
6	8,2	4,0	1,9	2,05	4,31

Технология производства отражается здесь с помощью производственной функции каждого из предприятий.

Приведем пример расчетов сравнительной эффективности двух предприятий. Предположим, что по статистическим данным за 6 лет работы предприятий *А* (табл. 4.1) и Б (табл. 4.2) для них построены производственные функции $y = 3{,}21256x_1^{0.40317} + x_2^{0.59831}$ и $y = 1{,}21337x_1 + 1{,}38971x_2$, где y — объем товарной продукции; x_1 — основные производственные фонды; x_2 — численность промышленно-производственного персонала.

Из табл. 4.1 и 4.2 видно, что фондоотдача на предприятии А ниже, чем на предприятии Б, поэтому сравнительная экономия основных фондов по формуле (4.3) в первом году составит:

$$Э_{\text{фонд}}(1) = 2{,}3 \cdot \frac{9{,}5}{4{,}9} - 4{,}3 = 0{,}159 > 0.$$

С другой стороны, производительность труда на предприятии А выше, чем на предприятии *Б*, так что сравни-

Таблица 4.2

Год	Товарная продукция	Основные фонды	Численность ППП	Фондоотдача	Производительность труда
1	9,5	4,3	3,2	2,21	2,97
2	10,3	4,6	3,4	2,24	3,02
3	10,7	4,9	3,4	2,18	3,15
4	11,2	5,1	3,7	2,20	3,03
5	12,1	5,4	4,0	2,24	3,02
6	13,0	5,8	4,3	2,24	3,02

тельная экономия трудовых ресурсов в первом году отрицательна:

$$Э_{труд}(1) = 1{,}2 \cdot \frac{9{,}5}{4{,}9} - 3{,}2 = -0{,}873 < 0.$$

Сходные результаты дает и применение формулы (4.5) интегрального метода. Сделать вывод на основании этих данных о том, какое предприятие работало более эффективно, затруднительно.

Произведем теперь расчет сравнительной эффективности совокупного использования ресурсов на основе производственных функций. Согласно (4.8) величина *Эфф* равна: за первый год — *Эфф* (1) = —1,27, за третий год — *Эфф* (3) = = —1,14, за пятый год — *Эфф* (5) = —1,45. Следовательно, во всех трех случаях более эффективно работало предприятие *А*.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

За более чем 50-летний период своего развития теория производственных функций как одна из областей экономической науки и практики стала разветвленной научной дисциплиной, включающей в себя ряд самостоятельных разделов. Библиография работ по анализу, построению и применению ПФ на различных уровнях и в различных условиях управления народным хозяйством содержит много сотен наименований. В настоящей книге отражена лишь часть вопросов, относящихся к теории производственных функций. За пределами изложения остались такие важные проблемы, как анализ взаимосвязей производственных функций хозяйственных систем с производственными функциями их подсистем и элементов, агрегирование и дезагрегирование производственных функций (см. [41]), взаимодействие производственных функций с детализированными моделями производства типа модели линейного программирования [35], использование производственных функций для прогнозирования научно-технического прогресса и нововведений [13] и многое другое. Для ориентации читателя в потоке литературы по производственным функциям мы приводим схему основных разделов и направлений теории производственных функций (рис. 4.1).

То понятие производственной функции, которое использовалось в данной работе, не является единственным. К настоящему времени более или менее оформились четыре варианта концепции производственной функции как экономико-статистической модели процесса производства продукции: а) вероятностная, согласно которой производственная функция рассматривается как математическое ожидание случайной величины выпуска при заданных ресурсах [23]; б) мажорантная (оптимизационная), где считается, что производственная функция выражает максимально возможный при заданных размерах основных ресурсов объем выпуска [20]; в) мажорантно-вероятностная, в которой производственная функция используется для выражения вероятной

верхней границы объема выпуска [43], и д) детерминированная концепция, последовательно изложенная в данной работе. В нашу задачу не входит подробный разбор и сравнительный анализ этих концепций; отметим лишь, что каждая из них опирается на совокупность определенных первоначальных посылок, играющих роль аксиом и не проверяемых полностью в рамках данной теории. Вопрос о выборе той или иной концепции не может быть решен раз и навсегда в пользу одной из них и решается каждый раз в зависимости от цели, объекта и — далеко не в последнюю очередь — субъекта моделирования.

Как правило, построение производственных функций и их включение в систему реальных экономических расчетов повышают качество разрабатываемых планов и достоверность результатов экономического анализа. Вместе с тем сегодняшний уровень развития теории и практики производственных функций таков, что эффективность их применения зависит от многих объективных и субъективных факторов. Серьезные проблемы возникают при формировании информационной базы ПФ. Существующая система формирования и сбора отчетных данных во многих случаях не позволяет достаточно обоснованно сопоставлять, в частности, объемы выпуска за разные годы. Причина этого не только в изменениях цен и номенклатуры продукции, структуры самого объекта, но и в различной методологии исчисления показателей. Такие показатели, как товарная и валовая продукция, определенные по наиболее распространенному сейчас заводскому методу, существенно зависят от структуры внутрисистемной кооперации. Трудности возникают также и при оценке восстановительной и балансовой стоимости основных фондов. Тем не менее есть основание полагать, что в процессе развития и интеграции автоматизированных информационных систем управления предприятиями, объединениями и отраслями, повышения их роли в реальном управлении достоверность, стабильность, а следовательно, и возможности использования статистических данных будут возрастать.

Результаты применения производственных функций во многом зависят от квалификации и опыта исследования в этой области. По мере накопления практического опыта трудоемкость построения ПФ существенно сокращается, а эффективность их применения возрастает. Расширить арсенал средств, которыми владеет экономист, повысить их обоснованность, целенаправленность и эффективность мы и стремились в этой книге.

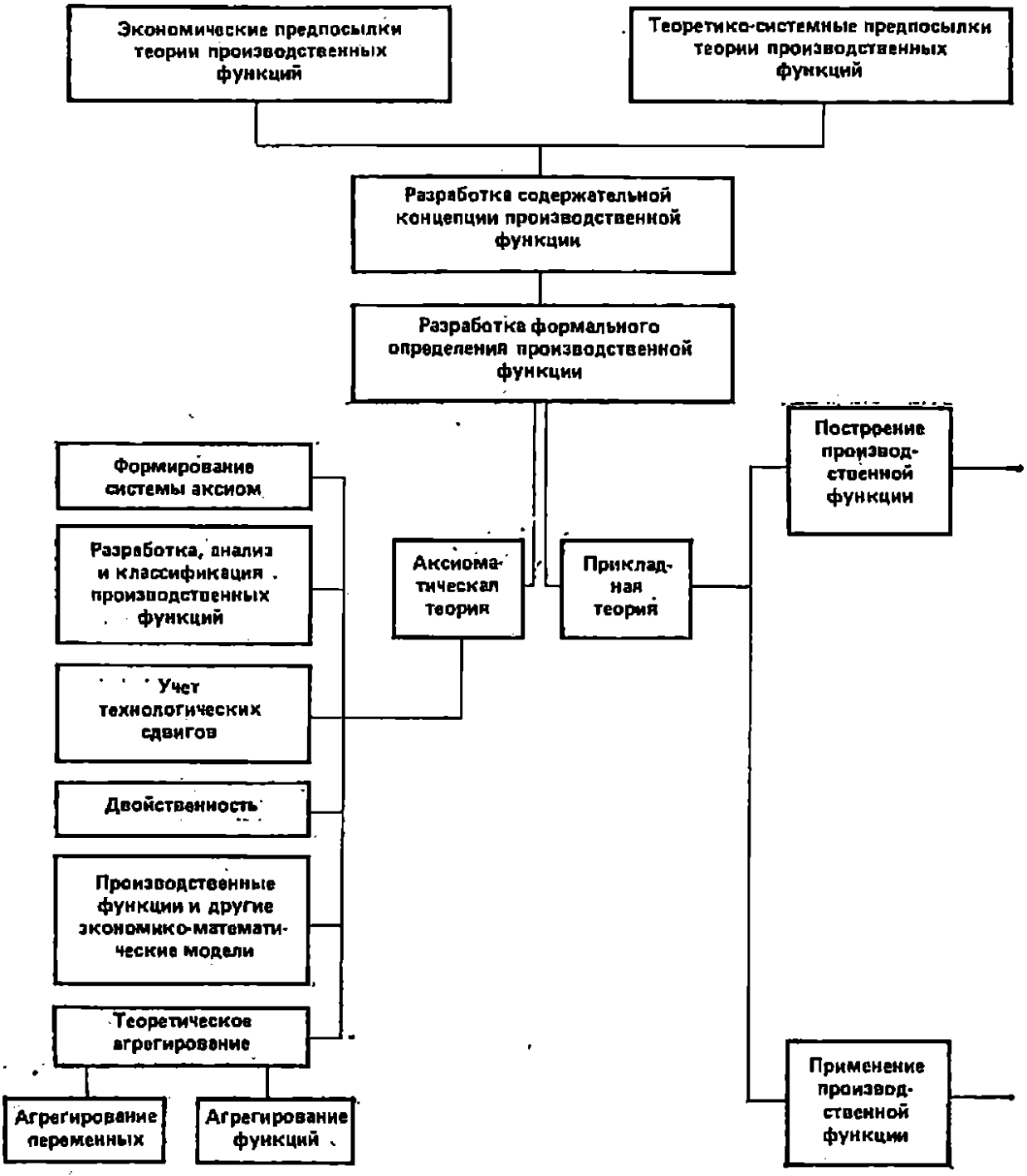
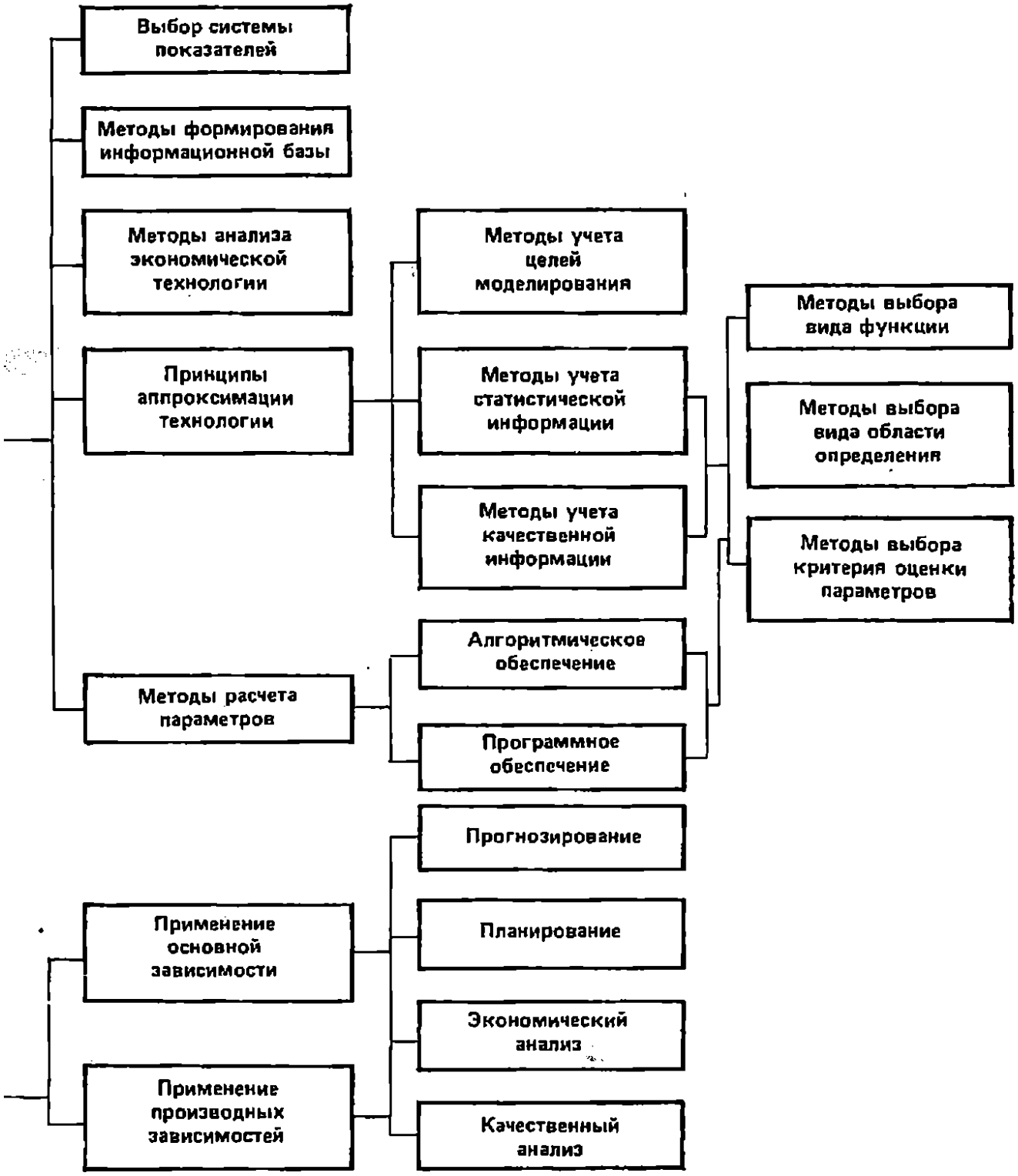

Экономические предпосылки теории производственных функций
Теоретико-системные предпосылки теории производственных функций
Разработка содержательной концепции производственной функции
Разработка формального определения производственной функции
Формирование системы аксиом
Разработка, анализ и классификация производственных функций
Учет технологических сдвигов
Двойственность
Производственные функции и другие экономико-математические модели
Теоретическое агрегирование
Агрегирование переменных
Агрегирование функций
Аксиоматическая теория
Прикладная теория
Построение производственной функции
Применение производственной функции

Рис. 4.1


Выбор системы показателей
Методы формирования информационной базы
Методы анализа экономической технологии
Принципы аппроксимации технологии
Методы расчета параметров
Применение основной зависимости
Применение производных зависимостей
Методы учета целей моделирования
Методы учета статистической информации
Методы учета качественной информации
Алгоритмическое обеспечение
Программное обеспечение
Прогнозирование
Планирование
Экономический анализ
Качественный анализ
Методы выбора вида функции
Методы выбора вида области определения
Методы выбора критерия оценки параметров

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маркс К. Капитал.— М.: Политиздат, 1973.
2. Основные направления экономического и социального развития СССР на 1986—1990 годы и на период до 2000 года: Проект. — М.: Политиздат, 1985.
3. Материалы Пленума Центрального Комитета КПСС 23 апреля 1985 г.— М.: Политиздат, 1985.
4. Алгоритмы и программы.— М.: ВНТИЦентр, 1982, № 6.
5. Анчишкин А. И. Прогнозирование роста социалистической экономики.— М.: Экономика, 1973.
6. Арнольд В. И. О представлении непрерывных функций трех переменных суперпозициями непрерывных функций двух переменных. — Математический сборник, 1959, т. 48, № 1.
7. Астахов Ю. И., Клейнер Г. Б., Райхельсон Е. И. Применение производственных функций на стадии предплановых расчетов в электромашиностроении.— Электротехническая промышленность,— 1982, № 2.
8. Ашманов С. А. Введение в математическую экономику.— М.: Наука, 1984.
9. Багриновский К. А. Модели и методы экономической кибернетики.— М.: Экономика, 1973.
10. Багриновский К. А., Егорова Н. Е., Радченко В. В. Имитационные модели в народнохозяйственном планировании.— М.: Экономика, 1980.
11. Баркалов Н. Б. Производственные функции в моделях экономического роста.— М.: МГУ, 1981.
12. Баумоль У. Экономическая теория и исследование операций.— М.: Прогресс, 1965.
13. Браун М. Теория и измерение технического прогресса.— М.: Статистика, 1971.
14. Бромберг Г. Л., Бузова Н. И., Клейнер Г. Б. Перспективное планирование производства в объединении.— М.: Экономика, 1978.
15. Бузова Н. И. Перспективное планирование и система нормативов.— В кн.: Проблемы финансов в хозрасчетных объединениях. М.: Наука, 1978.
16. Ванинский А. Я. Аксиоматический подход к обоснованию интегрального метода экономического анализа.— В кн.: Проблемы повышения качества планирования в объединении. М.: ИНЭУМ, 1979.
17. Вилкас Э. Й., Майминас Е. З. Решения: теория, информация, моделирование.— М.: Радио и связь, 1981.
18. Вишнев С. М. Производственные функции.— В кн.: Математика и кибернетика в экономике: Словарь-справочник. М.: Экономика, 1975.

19. Гладышевский А. И. Методы и модели отраслевого экономического прогнозирования.— М.: Экономика, 1977.
20. Гранберг А. Г. Математические модели социалистической экономики.— М.: Экономика, 1978.
21. Дамбраускас А. П. Симплексный поиск.— М.: Энергия, 1979.
22. Данилов-Данильян В. И., Майминас Е. З. Модель.— В кн.: Математика и кибернетика в экономике: Словарь-справочник. М.: Экономика, 1975.
23. Демиденко Е. З. Линейная и нелинейная регрессии.— М.: Финансы и статистика, 1981.
24. Демиденко Е. З. Нелинейная регрессия.— М.; ИМЭМО, 1984.
25. Дубров А. М. Обработка статистических данных методом анализа главных компонент.— М.: Статистика, 1978.
26. Ершов Э. Б., Левченко Н. Г. Структурная пропорциональность народного хозяйства и ее макроэкономический анализ.— Экономика и математические методы, 1981, т. XVII, вып. 4.
27. Иванилов Ю. П., Лотов А. В. Математические модели в экономике.— М.: Наука, 1979.
28. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. — М.: Мир, 1971.
29. Канторович А. В., Вайнштейн Альб. Л. Об исчислении нормы эффективности на основе однопродуктовой модели развития народного хозяйства.— Экономика и математические методы, 1967, т. III, вып. 5.
30. Клейнер Г. Б. Область определения производственной функции. — Экономика и математические методы, 1978, т. XIV, вып. 5.
31. Клейнер Г. Б. Методы анализа производственных функций.— М.: Информэлектро, 1980.
32. Клейнер Г. Б. Методы количественного определения влияния факторов на обобщающие экономические показатели. (См. [17].)
33. Клейнер Г. Б. Детерминированный анализ систем показателей. — Экономика и математические методы, 1981, т. XVII, вып. 6.
34. Клейнер Г. Б. Критерии оценки параметров производственных функций объектов автоматизированного управления.— Автоматика и телемеханика, 1982, № 7.
35. Клейнер Г. Б. Применение производственных функций при формировании годовых планов производства в объединении.— В кн.: Модели и методы принятия решений в управлении производственными объединениями. М.: ЦЭМИ, 1985.
36. Клейнер Г. Б., Сирота Б. Н. О производственных функциях с постоянными и переменными эластичностями замены факторов.— Экономика и математические методы, 1975, т. XI, вып.3.
37. Клейнер Г. Б., Сирота Б. Н. Пакет прикладных программ для построения и использования производственных функций в экономических расчетах (ПРОФЭР).— Приборы и системы управления, 1984, № 6.
38. Клейнер Г. Б., Сирота Б. Н. Об одном классе производственных функций.— Экономика и математические методы, 1976, т. XII, вып. 1
39. Колмогоров А. Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных

функций одного переменного и сложения.—Доклады АН СССР, 1957, т. 114, № 5.
40. Кобринский Н. Е., Кузьмин В. И. Точность экономико-математических моделей.— М.: Финансы и статистика, 1981.
41. Левченко Н. Г. Проблема агрегирования производственных функций (критический обзор).— В кн.: Малоразмерные модели экономического роста. М.: ИМЭМО АН СССР, 1978.
42. Макаров В. Л., Рубинов А. М. Математическая теория экономической динамики и равновесия.— М.: Наука, 1973.
43. Матеров И. С. К проблеме полной идентификации модели стохастических границ производства.— Экономика и математические методы, 1981, т. XVII, вып. 4.
44. Миркин Б. Г. Анализ качественных признаков и структур.— М.: Статистика, 1980.
45. Михалевский Б. Н. Система моделей среднесрочного народнохозяйственного планирования.— М.: Наука, 1972.
46. Мудров В. И., Кушко В. Л. Методы обработки измерений. — М.: Советское радио, 1976.
47. Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика.— М.: Мир, 1972.
48. Паппэ Я. Ш., Рывкин А. А. О попытках модельного подтверждения теории предельной производительности.— Экономика и математические методы, 1977, т. VIII, вып. 6.
49. Пирогов Г. Г., Федоровский Ю. П. Проблемы структурного оценивания в эконометрии.— М.: Статистика, 1979.
50. Полак Э. Численные методы оптимизации.— М.: Мир, 1974.
51. Подиновский В. В. Многокритериальные задачи с упорядоченными по важности однородными критериями.— Автоматика и телемеханика, 1976, № 11.
52. Пуарье Д. Эконометрия структурных изменений.— М.: Финансы и статистика, 1981.
53. Раяцкас Р., Бальсис О. Анализ экономического роста и оценка долгосрочных прогнозов.— Вильнюс: Минтис, 1979.
54. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ.— М.: Мир, 1973.
55. Садовский Л. Е., Иоффе Л. Ш., Клейнер Г. Б. Вопросы моделирования иерархических систем.—Изв. АН СССР, сер. «Техническая кибернетика», 1977, № 2.
56. Сирота Б. Н. О методах оценивания параметров нелинейных производственных функций.— В кн.: Экономико-математические проблемы хозрасчета в объединениях. М.: ИНЭУМ, 1977.
57. Смирницкий Е. К. Экономические показатели промышленности. — М.: Экономика, 1980.
58. Терехов Л. Л. Производственные функции.— М.: Статистика, 1974.
59. Типовая методика разработки пятилетнего плана производственного объединения (комбината), предприятия. — М.: Экономика, 1975.
60. Типовая методика разработки техпромфинплана производственного объединения (комбината), предприятия.—М.: Экономика, 1979.
61. Хайкин В. П., Найденов В. С., Галуза С. Г. Корреляция и статистическое моделирование в экономических расчетах.— М.: Экономика, 1964.
62. Хаштейн Г. Д. Методы прогнозирования в социалистической экономике.— М.: Прогресс, 1971.

63. Хеди Э., Диллон Д. Производственные функции в сельском хозяйстве.— М.: Прогресс, 1965.
64. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование.— М.: Мир, 1975.
65. Четыркин Е. М. Статистические методы прогнозирования.— 2-е изд. — М.: Статистика, 1977.
66. Шеремет А. Д., Дей Г. Г., Шаповалов В. Н. Метод цепных подстановок и совершенствование факторного анализа экономических показателей.— Вестник МГУ, сер. «Экономика», 1971, № 4.
67. Шмидт А. Г. О структуре производственных функций с постоянной эластичностью замещения.— В кн.: Исследование операций. М.: ВЦ АН СССР, 1972, вып. 3.
68. Экономический анализ хозяйственной деятельности / Под ред. А. Д. Шеремета. — М.: Экономика, 1979.
69. Яременко Ю. В., Ершов Э. Б., Смышляев А. С. Исследование взаимосвязи факторов экономического роста экономики СССР в 1950—1970 гг.— В кн.: Математические методы решения экономических задач. М.: Наука, 1974.
70. Allen R. G. D. Mathematical Analysis for Economists.— London: St. Martin's Press, 1938 (2-nd ed. 1963).
71. Douglas P. H., Cobb C. W. A theory of production.— Amer. Econ. Rev., 1928, March, Suppl.
72. Mc. Fadden D. Constant elasticity substitution production functions.— Rev. of Econ. Stud., 1963, 30.
73. Hanoch G. CRESH production functions.— Econometrica, 1971, 39.
74. Hartley H. O. Modified Gauss-Newton method for fitting of nonlinear regression functions. — Technometrics, 1961, N 3.
75. Hicks J. K. The Theory of Wages.— London: Macmillan, 1932 (2-nd ed. 1963).
76. Marquardt D. W. An algorithm for least-suares estimation of nonlinear parameters.— Journ. Soc. Indust. Appl. Math., 1963, 11, N 2.
77. Sato C. A two-level CES production function.— Rev. of Ec. Stud., 1967, vol. 34, N 98.
78. Sato R. The most general class of CES function.— Econometrica, 1975, vol. 43, N 5—6.
79. Sato R. Linear elasticity of substitution production function.— Metroeconomica, 1967, April, N 19.
80. Sato R., Hoffman R. H. Production function with variable elasticity at factor substitution: some analysis and testing. — Rev. Econ. and Statistics, 1968, vol. 50, N 4.
81. Shephard R. W. Cost and Production Functions.— Princeton: Princeton Univ. Press, 1953.
82. Solow R. A contribution to the theory of economic growth.— Quart. Journ. of Econ., 1956, 70, 65—94.
83. Uzawa H. Production functions with constant elasticities of substitution.— Rev. of Economic Stud., 1962, vol. 29, N 80.

СЛОВАРЬ ОСНОВНЫХ ТЕРМИНОВ

Автомат — математическая модель системы, состоящая из множества входных воздействий U, множества выходных воздействий Y, множества состояний системы X, отображения перехода φ: $U \cdot X \to X$ и выходного отображения ψ: $X \to Y$ (с. 11).

Агрегированная экономическая технология — способ переработки групп производственных ресурсов в готовую продукцию в групповой номенклатуре, реализованный в условиях организационно-экономических ограничений данной производственной системы (с. 18).

Агрегированная экономическая технология производственного процесса Π с показателями μ, ν — отображение τ подмножества $D \subset R^n_+$ в R^1, удовлетворяющее условию $\mu \circ \tau = \Pi \circ \nu$, где μ — система показателей производственных ресурсов; ν — показатель объема производства продукции (с. 29).

Адаптивный критерий оценки параметров — переменный критерий оценки параметров ПФ, вид и параметры которого меняются в зависимости от вида и текущих значений параметров оцениваемой функции (с. 144).

Адекватность модели — степень точности отражения в модели свойств моделируемого объекта и ее соответствия целям моделирования.

Аппроксимационная задача (схема) — задача поиска наилучшего приближения некоторого математического объекта. Формальная запись: $AS = \langle a, E, \rho, V \rangle$, где a — подлежащий аппроксимации математический объект; E — множество аппроксимирующих математических объектов; ρ — *бинарное отношение квазипорядка на*[1] E; позволяющее сравнивать элементы E по близости к a; V — схема вычислительного процесса поиска экстремального элемента отношения (с. 25).

Бинарное отношение на множестве E — подмножество в множестве всех пар (e_1, e_2), где e_1, e_2 — элементы множества E (с. 25).

Бинарное отношение квазипорядка — *квазирефлексивное* и *транзитивное отношение* (с. 26).

Бинарное отношение квазирефлексивное — отношение, для которого из условия $(e, e') \in \rho$ вытекает, что $(e, e) \in \rho$ для любых элементов $e, e' \in E$ (с. 26).

Бинарное отношение рефлексивное — отношение ρ, для которого $(e, e) \in \rho$ при любом $e \in E$ (с. 38).

Бинарное отношение транзитивное — отношение ρ, для которого из условия $(e, e') \in \rho$ и $(e', e'') \in \rho$ следует, что $(e, e'') \in \rho$ (с. 38).

---

[1] Курсивом выделены ссылочные слова.

Идентификация модели — определение и уточнение переменных и параметров модели на основе данных о моделируемом объекте и целях моделирования (с. 7).

Идентификация ПФ по значениям — оценка параметров ПФ, основанная на минимизации расстояния между фактическими и вычисленными значениями ПФ в заданных точках (с. 158).

Идентификация ПФ по изоквантам — оценка параметров ПФ, основанная на минимизации расстояния от *изокванты*, отвечающей фактическому значению функции $y(t)$, до соответствующего значения аргумента $x(t)$ (с. 158).

Изокванта функции $f(x)$ — множество точек x из *области определения* функции f, в которых $f(x) = \text{const}$ (с. 59).

Интерпретация модели — определение и уточнение характеристик моделируемого объекта с помощью его модели.

Классическая функция — *неоклассическая функция* первой степени однородности (с. 52).

Неоклассическая функция — неубывающая, однородная и вогнутая функция (с. 52).

Нормальная область — множество *нормальных точек пространства ресурсов* (с. 122).

Нормальная точка пространства ресурсов — точка $x = (x_1, \ldots, x_n)$, для которой соотношения между ресурсами $x_1, \ldots, x_n$ с учетом их взаимозаменяемости отвечают нормальным условиям производства (отсутствие избытка и дефицита ресурсов) (с. 122).

Нормативная функция выпуска — минимальный объем выпуска, рассчитываемый по *нормативной функции затрат на 1 руб. товарной продукции* или *нормативной функции прибыли* (с. 181, 196).

Нормативная функция затрат на 1 руб. товарной продукции — функция $g(c)$, выражающая минимальный для данной производственной системы уровень затрат на 1 руб. продукции в зависимости от *структурных коэффициентов себестоимости* (с. 180).

Нормативная функция прибыли — функция $p(c)$, выражающая максимальный для данной производственной системы размер прибыли через *структурные коэффициенты себестоимости* (с. 194).

Область определения агрегированной экономической технологии — множество значений, которые могут принимать показатели ресурсов моделируемого производственного процесса (с. 29).

Область определения производственной функции — множество значений, которые могут принимать аргументы *производственной функции* при условии сохранения ее адекватности (с. 23).

Определяющий ресурс — вид ресурса, наличие которого определяет производственный потенциал системы (с. 131).

Предельная производительность i-го ресурса — характеристика ПФ $f(x_1, \ldots, x_n)$, имеющая вид $\chi^1_{1i} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$.

Прогностическая функция — однофакторная функция, используемая для прогнозной экстраполяции экономических показателей.

Производственная функция — экономико-статистическая модель процесса производства продукции, отражающая устойчивую закономерную количественную зависимость между объемными показателями ресурсов и выпуска (с. 15).

Производственная функция процесса П с показателями μ, ν в классе вычислимых функций W — решение *аппроксимационной задачи* $AS = \langle \tau, W, \rho_\tau, V \rangle$, где τ — агрегированная экономическая

технология процесса П с показателями μ, ν; ρ_τ — *бинарное отношение квазипорядка* на множестве W; V — вычислительный алгоритм (с. 36).

Спецификация параметров модели — определение конкретных (или вероятных) численных значений параметров (коэффициентов) математической модели на основе данных о моделируемом объекте и цели построения модели (с. 10).

Структурные коэффициенты себестоимости — коэффициенты $c_1, \ldots, c_n$ в *функции себестоимости* (с. 184).

Функция себестоимости — функция $c(x) = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$, выражающая величину издержек производства в зависимости от объемов участвующих в производстве ресурсов (с. 184).

Экономико-математическая модель — математическая модель процесса (объекта), отражающая его экономические характеристики и предназначенная для изучения экономических аспектов его функционирования (с. 8).

Экономико-статистическая модель — *экономико-математическая модель*, при идентификации которой использовались методы статистической обработки данных.

Эластичность выпуска по масштабу производства — характеристика ПФ $f(x_1, \ldots, x_n)$, имеющая вид $\chi_1^1 = \frac{df(\lambda x)}{\partial\lambda} \Big/ \frac{f(\lambda x)}{\lambda}$ (с. 49).

Эластичность выпуска по i-му ресурсу — характеристика ПФ $f(x_1, \ldots, x_n)$, имеющая вид $\chi_{2i}^1 = \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{x_i}{f}$ (с. 48).

Эластичность замены i-го фактора j-м по Аллену — характеристика ПФ $f(x_1, \ldots, x_n)$, имеющая вид

$$\sigma_{ij}^{\text{А}} = (x_1 f_{11}^1 + \ldots + x_n f_{1n}^1)\, H_{ij}/x_i x_j\, H,$$

где H_{ij} — алгебраическое дополнение к элементу $h_{i+1,j+1}$ $(n+1)\times(n+1)$-матрицы $H = (h_{ij})$, в которой $h_{11} = 0$, $h_{1i} = h_{i1} = f_i$, $h_{ij} = f_{i-1,j-1}$, $i, j = 2, \ldots, n$ (с. 74).

Эластичность замены i-го фактора j-м обратная — характеристика ПФ, имеющая вид $\sigma_{ij}^{\text{обр}} = \frac{f_j/f_i}{x_i/x_j} \Big/ \frac{\partial(f_j/f_i)}{\partial(x_i/x_j)}$, где $x_k/x_j = \text{const}$, $k \neq i\, j$, $f = \text{const}$ (с. 67).

Эластичность замены i-го фактора j-м по Мак Фаддену — характеристика ПФ, имеющая вид $\sigma_{ij}^{\text{Ф}} = \frac{f_j/f_i}{x_i/x_j} \Big/ \frac{\partial(f_j/f_i)}{\partial(x_i/x_j)}$, где $x = \text{const}$ при $k \neq i, j$, $f = \text{const}$ (с. 64).

Эластичность замены i-го фактора j-м по Михалевскому — характеристика ПФ, имеющая вид $\sigma_{ij}^{\text{М}} = \frac{f_j/f_i}{x_i/x_j} \frac{\text{d}(x_i/x_j)}{\text{d}(f_j/f_i)}$, где в числителе и знаменателе стоят полные дифференциалы (с. 76).

Эластичность замены i-го фактора j-м прямая — характеристика ПФ, имеющая вид $\sigma_{ij}^{\text{пр}} = \frac{f_j/f_i}{x_i/x_j} \frac{\partial(x_i/x_j)}{\partial(f_j/f_i)}$, где $f_k/f_i = \text{const}$ при $k \neq i, j$, $f = \text{const}$ (с. 71).

ОГЛАВЛЕНИЕ

Клейнер Георгий Борисович

ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ
ТЕОРИЯ, МЕТОДЫ, ПРИМЕНЕНИЕ

Зав. редакцией *Р. А. Казьмина*
Редактор *Л. Н. Вылегжанина*
Мл. редакторы *А. В. Щурова, В. Г. Крылова*
Худож. редактор *М. К. Гуров*
Техн. редакторы *Г. А. Полякова, Р. Н. Феоктистова*
Корректоры *Я. Б. Островский, Е. М. Смирнова* и *Л. Г. Захарко*
Переплет художника *Е. К. Самойлова*
ИБ № 1829

Сдано в набор 02.09.85. Подписано в печать 20.01.86. А12204.
Формат 84×108 1/32. Бум. офс. № 2. Гарнитура «Литературная».
Печать офсетная. Усл. п. л. 12,6. Усл. кр.-отт. 12,81.
Уч.-изд. л. 13,32. Тираж 5000 экз. Заказ 1104. Цена 2 руб.
Издательство «Финансы и статистика»,
101000, Москва, ул. Чернышевского, 7
Московская типография № 4 Союзполиграфпрома
при Государственном комитете СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
129041, г. Москва, Б. Переяславская ул., дом 46